

Legendre 多項式と周辺事項に関する覚書

低音

2022年3月24日

誤植・質問等は note のコメント機能または筆者 Twitter https://twitter.com/teion_burns に連絡いただきたい。

目次

第 I 部	はじめに	3
1	本記事の読み方	4
2	必要な知識	5
3	参考文献について	6
3.1	Legendre 多項式と出会うための参考文献	6
3.2	Legendre 多項式とお付き合いを始めるための参考文献	6
3.3	Legendre 多項式とマブダチになるための参考文献	6
4	Legendre 多項式の登場場面 <small>短 電 P 電多 電通 電 2 量 P 量角 量通 数 食</small>	8
4.1	静電場決定問題 <small>電 P 電通 電 2 食</small>	8
4.2	定常的な波動方程式 <small>電 P 電通 電 2 量 P 量通 食</small>	8
4.3	中心力ポテンシャル問題の空間に関する Schrödinger 方程式 <small>量 P 量通 食</small>	9
4.4	軌道角運動量の固有状態の極座標表示 <small>量角 量通 食</small>	9
4.5	多重極展開 <small>電多 電通 電 2 食</small>	10
第 II 部	斉次 Poisson 方程式のための Legendre	12
5	極座標系の斉次 Poisson 方程式の解析 <small>短 電 P 電通 電 2 量 P 量通 数 食</small>	13
5.1	変数分離 <small>電 P 電通 電 2 量 P 量通 数 食</small>	13
5.2	変数分離された分布の満たす微分方程式 <small>短 電 P 電通 電 2 量 P 量通 数 食</small>	14
6	Legendre の陪微分方程式から得られる性質 <small>電通 電 2 量通 数 食</small>	17
6.1	陪微分方程式の級数展開 <small>電 2 数 食</small>	17

6.2	直交性 <small>電² 数 食</small>	20
6.3	Poisson 方程式の一般的な境界条件とパラメーター λ, m の制限 <small>電通 電² 量通 数 食</small>	21
7	Rodrigues の公式 <small>短 電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	26
7.1	Rodrigues の公式概論 <small>電² 量 P 量通 数 食</small>	26
7.2	Rodrigues の公式による Legendre 多項式 <small>短 電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	29
7.3	Rodrigues の公式による Legendre 陪多項式 <small>短 電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	33
8	極座標斉次 Poisson 方程式一般解 <small>短 電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	37
8.1	Poisson 方程式を解く問題の定式化 <small>電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	37
8.2	解の一意性 <small>電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	37
8.3	Poisson 方程式の一般解探索 <small>短 電 P 電通 電² 量 P 量通 数 食</small>	39
9	球面調和関数 <small>電通 電² 量 P 量角 量通 数 食</small>	41
9.1	球面調和関数の具体形 <small>電通 電² 量 P 量角 量通 数 食</small>	41
第 III 部 固有方程式のための Legendre		43
10	軌道角運動量の固有関数 <small>量角 量通 食</small>	44
10.1	極座標における軌道角運動量にまつわる演算子 <small>量角 量通 食</small>	44
10.2	軌道角運動量の固有波動関数の具体形 <small>量角 量通 食</small>	46
第 IV 部 多項式展開のための Legendre		51
11	Legendre 多項式の母関数 <small>短 電多 電通 電² 数 食</small>	52
11.1	Legendre 多項式の母関数による定義 <small>短 電多 電通 電² 数 食</small>	52
11.2	母関数表示の妥当性 <small>電² 数 食</small>	53
付録 A Γ 関数と B 関数		57
A.1	Γ 関数	57
A.2	B 関数	58
A.3	積分への応用	58

第1部

はじめに

1 本記事の読み方

本記事では、学習深度に合わせて

1. 最短ルート
2. 電磁気初学者
 - (a) Poisson 方程式のみ
 - (b) 多重極展開のみ
 - (c) 通覧
3. 電磁気 2 周目
4. 量子オンリー
 - (a) Poisson 方程式のみ
 - (b) 角運動量のみ
 - (c) 通覧
5. 数学オンリー
6. 貪欲

のルートを用意している。各小節の頭に頭文字をつけているので、それを参考に読み進めていただきたい。また、推奨する読み方に合わせて各小節末尾に次の小節へジャンプできるハイパーリンクも貼り付けている。ここに示した読み方は例に過ぎず、これに沿う必要はない。自分の理解に合わせて目次を辿りながら読むことができるのであれば、それに勝ることはないだろう。

また、§3 には参考にした文献をコメントとともに載せた。個人的に理解しやすかったものを列挙しているため、数学系に向けて書かれた書物は数が少ない。特徴と合わせて自分に合うものを読み進めてもらうと良い。

略記は以下の通りである。

短 最短ルート

電 P 電磁気初学者 Poisson 方程式のみ

電多 電磁気初学者 多重極展開のみ

電通 電磁気初学者 通覧

電 2 電磁気 2 周目

量 P 量子オンリー Poisson 方程式のみ

量角 量子オンリー 角運動量のみ

量通 量子オンリー 通覧

数 数学オンリー

貪 貪欲

2 必要な知識

§1 で示した通り、この記事の読み方は好きなようにして良いが、線形常微分方程式の知識と経験は一貫して必要不可欠である。

読み方ごとに追加して必要な知識は表 1 のようになる。

表 1 読み方によって必要になる知識

必要知識	短	電 P	電多	電通	電 2	量 P	量角	量通	数	貪
極座標における微分		○		○	○	○	○	○	○	○
複素積分			○	○					○	○
量子力学の角運動量							○	○		○

3 参考文献について

参考文献の中で、特に有用だったものを掲げる。より深く学習したい場合に役立ててほしい。

3.1 Legendre 多項式と出会うための参考文献

3.1.1 砂川重信「理論電磁気学 第3版」[1]

言わずと知れた邦書電磁気学の重鎮。電磁気学をしっかり学ぶなら、避けては通れない一冊。

Legendre 多項式についての説明は少ない。直交関数系の例として巻末に直交性の挙げられている他は、基本的にトップダウンに与えられる。「Legendre 多項式が Legendre の微分方程式の解なのは、代入すれば簡単にわかるでしょ」のレベルである。

一方で、「なぜ Legendre 多項式を使うのか」という背景説明は論理立っている。要は、「こういう場面で使うから、特殊関数は他の本で学べ」というスタンス。

3.1.2 猪木慶治・川合光「量子力学 I」[2]

数ある量子力学の参考書において、その豊富な演習問題で有名。Legendre 多項式についての説明も比較的十分なされている。Poisson 方程式を解くにあたって、これだけあれば戦場には立てるだろう。

巻末に特殊関数が各論的にまとめられている。直交多項式は Legendre, Laguerre, Hermite の3つ。加えて合流型超幾何関数と球 Bessel 関数について説明がある。超関数をガチらなければこれくらいで十分。

3.2 Legendre 多項式とお付き合いを始めるための参考文献

3.2.1 半揚稔雄「つかえる特殊関数入門」[3]

微分の式変形が、よく言えば行間が少ない。悪く言えば冗長。実際に手計算するにあたっては、より洗練された方法を参照するのが良いかもしれない。

球面調和関数の幾何学的特徴には目を見張るものがある。構成は読みやすく、特殊関数の一冊目にするには申し分ない。

3.2.2 柴田尚和・是常隆「物理数学 量子力学のためのフーリエ解析・特殊関数」[4]

名前の通り量子力学を焦点に書かれたものであるが、これを読んでおけば本記事に挙げた Legendre 多項式に関する要点はあらかた網羅できる。

他にも級数展開、Fourier 変換、Laplace 変換、Bessel 関数、Hermite 関数を収録。特に理論物理向けで Laplace 変換を取り上げているのは比較的珍しい。

3.3 Legendre 多項式とマブダチになるための参考文献

3.3.1 佐々木隆「物理学基礎シリーズ 11 物理数学」[5]

全体的に線形代数色が強く、また調和関数を Fourier 変換と結びつけるなど直感に強く働きかけ、なおかつ厳密性にも気を配る、他ではみられないタイプ。特殊関数3周目くらいで読んでも発見が多いだろう。7章の調和関数については一見の価値あり。

3.3.2 時弘哲治「工学における特殊関数」[6]

「工学における」の名前から想像できないくらいの豊富な数学的内容を含む。高度な内容を備えつつ説明が簡明という、数学書の境地に達したような一冊。全ての数学書はこれを目指してほしいと切に願う。Legendre には Rodrigues の公式を満たす直交多項式多項式の文脈からアプローチし、超幾何関数へとつなげる。

他にも Γ 関数、B 関数、Chebyshev の多項式、Laguerre 多項式、Hermite 多項式、Fuchs 型微分方程式、Gauss の超幾何関数、合流型超幾何関数、楕円関数など。学部の間はこれ一冊で超関数については困らないだろう。

3.3.3 金子尚武・松本道男「現代数学レクチャーズ C-3 特殊関数」[7]

電磁気などへの応用例が豊富。付録に「直交多項式の統一的取扱い」と題して Rodrigues の公式から超幾何関数までの道のりを示している。[6] 同様、Legendre の勉強の後に超幾何関数へとつなげるにはこちらもおすすめ。

4 Legendre 多項式の登場場面 短 電 P 電多 電通 電 2 量 P 量角 量通 数 食

Legendre 多項式は物理学徒が初めて本気で解析を迫られる超関数の一つである。電磁気学の静電場決定問題に始まり、電気双極子の多重極展開、量子力学では中心力ポテンシャル問題の Schrödinger 方程式から軌道角運動量の固有状態にまで現れる。

大概のテキストは Legendre 関数の話に入ると、説明を放棄して巻末に参考文献を挙げるか、本題を忘れるくらいの長ったらしい解説を展開する。ただ、それは避けられないことなのだ。物理学徒にとって特殊関数は避けては通れないものの、天から降ってきたものと捉えて説明を読み飛ばしたくなるくらいに面倒な計算が待ち構えている。

Legendre 多項式は第一に**極座標系における Poisson 方程式の解に現れる**。上記の例で言えば静電場の決定問題と中心力ポテンシャル問題の Schrödinger 方程式がこれに当たる。軌道角運動量についてもこの側面を一部引き継いでいる。多重極展開は Legendre 多項式の母関数を用いる。上記とは Legendre 多項式の用途を大きく異にしていることに注意されたい。

本節の参考文献は [1] pp. 88-, 115-, 233, [2] pp. 132- である。

jump to ... 短 §5 電多 §4.5 量 P §4.2 量角 §4.4 量通 §4.2 数 §5

4.1 静電場決定問題 電 P 電通 電 2 食

物理学徒が最初に極座標の Laplace 方程式を解くことになるのが電場の決定問題である。この手の問題で電場を決定するには、まず電荷分布に基づいて電位を計算し、その勾配を取ることによって解決する手法をとる。すなわち

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\varepsilon$$

から $\phi(\mathbf{x})$ を求め、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x})$$

とする。ここでは $\rho(\mathbf{x}) = 0$ で

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.1}$$

となる系を考える。

(4.1) を極座標で $\phi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ のように変数分離して得られる方程式のうち、 Θ (厳密には Θ の変形) が満たすのが Legendre の陪微分方程式と呼ばれるものである。R, Φ についても解を求め、その積によって電位 ϕ の一般解が得られる。あとは適切な境界条件を付して未定係数を決定し、勾配を求めれば電場が得られる。

4.2 定常的な波動方程式 電 P 電通 電 2 量 P 量通 食

電磁波をはじめとして、波動と呼ばれるものは基本的に波動方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0$$

を満たす。定常波

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t} \phi(\mathbf{x})$$

がこの方程式を満たすとき、方程式は

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\phi(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

の形 (Helmholtz 方程式) に書き換えられる。

§4.1 同様、 $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離して得られる方程式のうち、 Θ (厳密には Θ の変形) が満たすのが Legendre の陪微分方程式である。

jump to ... 電 P§5 電多 §4.5 電通 §4.5 電 2§4.5

4.3 中心力ポテンシャル問題の空間に関する Schrödinger 方程式 量P 量通 食

空間に関する Schrödinger 方程式

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x})\right)\phi(\mathbf{x}) = E\phi(\mathbf{x})$$

は運動量演算子の 2 乗が $\hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2\Delta$ で与えられることから、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})\right)\phi(\mathbf{x}) = E\phi(\mathbf{x})$$

となる。Poisson 方程式であることを明示するために

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x})$$

としておこう。ここで水素原子型や調和振動子型のポテンシャルを考えれば、

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r))\phi(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

の形となる。

§4.1, §4.2 と同様に $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離すれば、 Θ (厳密には Θ の変形) が Legendre の陪微分方程式を満たす。 Φ は簡単に解ける。 R については一般にはより複雑な方法を用いなければ解けない。かくして R, Θ, Φ が求まれば、その積によって波動関数 ϕ が得られる。

jump to ... 量 P§5

4.4 軌道角運動量の固有状態の極座標表示 量角 量通 食

最終的には極座標の Poisson 方程式を解くときに得られる関数に帰着するが、そもそもの目的が異なるものとして量子力学で扱う 1 粒子の極座標における軌道角運動量の固有状態がある。

一般に角運動量 $\hat{\mathbf{l}}$ は演算子のベクトルであり、空間 3 成分 $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ を持つ。角運動量の大きさ l に対応する固有値を与える演算子は $\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$ で表される。この固有値を $\hat{l}^2|l\rangle = l(l+1)|l\rangle$ と表せば、 $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ に限られる。この性質から一般に「 \hat{l}^2 の固有値が $l(l+1)$ となる固有状態」を $|l\rangle$ で表す。 \hat{l}^2 と同時対角化できる成分は $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ のうちただ 1 つであり、 \hat{l}_z を選ぶのが一般的である。 \hat{l}_z の固有状態は $|l\rangle$ ごとに縮退しており、その固有値は l に応じて $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ の $2l+1$ 個の整数もしくは半整数値を取る。そこで一般に「 \hat{l}^2 の固有値が $l(l+1)$ であり、かつ \hat{l}_z の固有値が m となる固有状態」を $|l, m\rangle$ とすることが多い。同時対角化できない残りの 2 成分 \hat{l}_x, \hat{l}_y を使って $\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$ とすると、固有状態 $|l, m\rangle$

の l を固定したまま m の値を上下できる。その際、 $\hat{l}_{\pm}|l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l, m\pm 1\rangle$ と係数を出す。以上をまとめると

$$\begin{aligned} l &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \\ \hat{l}^2 &= \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \\ \hat{l}_+ &= \hat{l}_x + i\hat{l}_y \\ \hat{l}_- &= \hat{l}_x - i\hat{l}_y \\ \hat{l}^2|l, m\rangle &= l(l+1)|l, m\rangle \\ \hat{l}_z|l, m\rangle &= m|l, m\rangle \\ \hat{l}_+|l, m\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle \\ \hat{l}_-|l, m\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l, m-1\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

である。

1 粒子系の角運動量の例として軌道角運動量 $\hbar\hat{l} = \hat{r} \times \hat{p}$ を考えよう。座標表示における演算子 \hat{l} の具体形は煩瑣だが高度ではない計算によって求められる。固有状態の座標表示を極座標で $Y_l^m(r, \theta, \varphi) = \langle r, \theta, \varphi | l, m \rangle$ と表したとき、(4.4) に応じて

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 Y_l^m(r, \theta, \varphi) &= l(l+1) Y_l^m(r, \theta, \varphi) \\ \hat{l}_z Y_l^m(r, \theta, \varphi) &= m Y_l^m(r, \theta, \varphi) \\ \hat{l}_+ Y_l^m(r, \theta, \varphi) &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_l^{m+1}(r, \theta, \varphi) \\ \hat{l}_- Y_l^m(r, \theta, \varphi) &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_l^{m-1}(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

のように振る舞う。この関数 $Y_l^m(r, \theta, \varphi)$ の具体形を解析すると、§4.3 で得られる関数形と一致する。これによって中心力ポテンシャルの Schrödinger 方程式の解は軌道角運動量の固有状態の線型結合で表されることがわかる。

jump to ... 量角 §9 量通 §5

4.5 多重極展開 電多 電通 電2 食

上記の例とは全く違う手法のために Legendre 多項式を用いるのが、多重極展開である。

電荷密度 $\rho(\mathbf{x}')$ が有界閉領域 $\mathbf{x}' \in V$ でのみ値を持つとする。すなわち、電荷は全て体積 V の中に入っている。総電荷を

$$Q = \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}')$$

としよう。このとき、 V から十分離れた場所では、 V の中に電荷密度 ρ が分布しているのと、 V の中心に点電荷 Q があるのとで、区別がつきにくいと考えられる。^{*1} この効果を記述するのが電荷密度分布の多重極展開である。

具体的な話をしよう。

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

を満たす Green 関数を用いることで、Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon}$$

^{*1} 夜空の恒星を思い起こしてみると良い。本来恒星は球体であって、地球からの見かけの輝度は表面上各点で異なる。星の輝度が均質に分布していても、星を見込んだときの中心に当たる点からの光が最も強く、外側ほど弱く見える。しかし我々人間の目からすれば点光源と区別がつかない。

の特解を

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\epsilon}$$

とすることができる。^{*2} Fourier 変換などを用いることで

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

が得られるので、 \mathbf{x} と \mathbf{x}' のなす角を θ とおけば、余弦定理から

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3x' \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \theta}} = \frac{1}{4\pi\epsilon x} \int_V d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\sqrt{1 + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 - 2\frac{x'}{x} \cos \theta}} \quad (4.6)$$

となる。ただし $x = |\mathbf{x}|$, $x' = |\mathbf{x}'|$ である。この被積分関数を

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{x} \sum_n \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') a_n(\cos \theta) \left(\frac{x'}{x}\right)^n \quad (4.7)$$

の形にしたい。例えば「 $O(x'/x)^2$ までなら無視して良い」などと判断できれば、電位の概算値、ひいてはおよその電場を求めることができる。この展開係数 $a_n(\cos \theta)$ こそが Legendre 多項式になる。

jump to ... 電多 §11

^{*2} この手の Green 関数についての解説は [1] pp. 85- を参照。

第 II 部

齊次 Poisson 方程式のための Legendre

5 極座標系の斉次 Poisson 方程式の解析 短電P 電通 電2 量P 量通 数 食

§4.1 や §4.2, §4.3 のような状況での Poisson 方程式を考えよう。

静電場決定問題の (4.1) にしろ、定常波の波動方程式 (4.2) にしろ、中心力ポテンシャルの Schrödinger 方程式 (4.3) にしろ、Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$$

の右辺が極座標でいう r だけの関数(ないし r にすら依存しない定数) と ϕ の積になって、

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -f(r)\phi(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

の形をしている。^{*3} すなわち **斉次 Poisson 方程式** である。特に静電場の例 §4.1 では $f(r) = 0$ の **Laplace 方程式**, 波動方程式の例 §4.2 では $f(r) = \text{const.}$ の **Helmholtz 方程式** となる。

(5.1) の解を求めるには変数分離をするのがいいだろう。以下、変数分離した r, θ, φ 各変数の関数 $R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$ が満たす方程式を導出、解析していく。特に **Θ の変形が満たすのが Legendre の陪微分方程式** になる。

本節の参考文献は [1] pp. 115-, [2] pp. 132-, [3] pp. 112-, [4] pp. 102-, [6] pp. 121- である。

jump to ... 短 §5.2.2

5.1 変数分離 電P 電通 電2 量P 量通 数 食

5.1.1 動径変数と角変数の分離 電P 電通 電2 量P 量通 数 食

変数分離によって

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (5.2)$$

とする。^{*4} これを (5.1) に入れれば

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \Theta\Phi + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \Phi R + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} R\Theta = -f(r)R\Theta\Phi.$$

両辺を $r^2/R\Theta\Phi$ 倍して

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -r^2 f(r)$$

となる。^{*5} 移項して r 依存部分と θ, φ 依存部分を分ければ

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r) = -\frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\Phi \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \quad (5.3)$$

が得られる。

(5.3) 左辺は r のみに、右辺は角度変数 θ, φ のみに依存しているので、恒等的に等号が成り立つには両辺とも定数でなければならない。この定数を

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r) = -\frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\Phi \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \equiv \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (5.4)$$

^{*3} 特殊関数を与える微分方程式は歴史的に項を左辺に集めることが主流だったために、右辺の項には負号をつけるという話がある。出典は見つかっていないので注意。

^{*4} 特に右辺の $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ は積の形で球面調和関数と呼ばれる。詳細は §9 を参照。

^{*5} この ϕ で割る操作ゆえに、考える Poisson 方程式は斉次でなければならない。また微分のつかない項 (右辺) は r, θ, φ いずれか 1 つの変数にのみ依存するもの (またはその和) でなければ、変数分離が難しい。

としておく。

5.1.2 角変数同士の分離 電P 電通電2量P 量通数食

さて、今度は角変数を分離しよう。

(5.4) の右側の等号によって

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

である。(5.3) から (5.4) を得るときと同様に、左辺は θ のみに、右辺は φ のみに依存するので、複素定数 m によって

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \equiv m^2 \quad (5.5)$$

とできる。^{*6}

5.2 変数分離された分布の満たす微分方程式 短電P 電通電2量P 量通数食

変数分離によって変数が r だけ、 θ だけ、 φ だけの方程式がそれぞれ得られる。この方程式を整理して一般解を求める準備をしよう。

5.2.1 動径方程式 電P 電通電2量P 量通数食

(5.4) の両端をとれば

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r) = \lambda$$

となる。両辺 R 倍して整理すると

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r) R - \lambda R = 0$$

が手に入る。この解 R は一般に λ によって異なるから、

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_\lambda}{dr} \right) + r^2 f(r) R_\lambda - \lambda R_\lambda = 0 \quad (5.6)$$

と書いておこう。Poisson 方程式の一般解 $\phi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ における R はこの方程式の一般解である。そこで、この方程式を**動径方程式**と呼ぶ。

$\Theta(\theta = 0, \pi)$ の正則性を考慮すると、 $\lambda = l(l+1)$ とおき $l \in \mathbb{Z}$ の場合を考えるのが一般的である (cf. §6.3.2, §6.3.3)。この時 (5.6) は直ちに

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + r^2 f(r) R_l - l(l+1) R_l = 0 \quad (5.7)$$

と書き換えられる。^{*7} 物理での応用を考えると主はこの動径方程式を解く。

^{*6} $m \in \mathbb{C}$ としたが、特に古典物理を考えるにあたっては $m^2 \notin \mathbb{R}$ となることはない。したがって m は実数ないし純虚数に限られる。また、わざわざ定数を m^2 とおいたことに恣意性を感じる読者も少なくないはずだ。この定数の置き方の恣意性については §5.2.3 及び §6.3.1 にて解決される。

^{*7} ここで、 $R_\lambda(r)$ と $R_l(r)$ とは全く別の関数形であり、本来は $R_{l(l+1)}(r)$ と書くべきなのだろうが、使用頻度や使いやすさ、視認性を考慮すれば、 R_l とするのが経済的であると考えられよう。同様のラベリングに関する注意は Θ についても言える。脚注*10 参照。

5.2.2 Θ の満たす微分方程式 短電P 電通電2 量P 量通数食

(5.5) の両端を使えば、

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta \sin^2 \theta = m^2 \Theta \quad (5.8)$$

が要請される。ここで $\sin \theta d/d\theta$ の形が目立つので、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= x \\ -\sin \theta d\theta &= dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

としておこう。このとき

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\theta} &= -\sin \theta \frac{d\Theta}{dx} \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= \sin^2 \theta \frac{d^2\Theta}{dx^2} - \cos \theta \frac{d\Theta}{dx} \end{aligned}$$

が成り立つので、(5.8) の微分を Leibnitz rule で分解した後 Θ の微分を代入して、

$$\sin^2 \theta \left(\sin^2 \theta \frac{d^2\Theta}{dx^2} - \cos \theta \frac{d\Theta}{dx} \right) + \sin \theta \cos \theta \left(-\sin \theta \frac{d\Theta}{dx} \right) + \lambda \Theta \sin^2 \theta - m^2 \Theta = 0$$

が得られる。両辺 $\sin^2 \theta$ で割って (5.9) を使えば

$$(1-x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \lambda \Theta - \frac{m^2}{1-x^2} \Theta = 0$$

である。解 Θ は l, m の値によって変わるので Θ_λ^m と書いておけば、第1項と第2項をまとめて

$$\left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] \Theta_\lambda^m = 0$$

と表せる。

かくして x の関数 y に関する方程式が得られる。^{*8}

Legendre の陪微分方程式

$$L_\lambda^m [y_\lambda^m] := \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] y_\lambda^m(x) = 0 \quad (5.10)$$

これこそ我々が数十ページをかけてこねくり回す **Legendre の陪微分方程式** である。^{*9}

$x = \pm 1$ すなわち $\theta = 0, \pi$ における解の正則性を考慮すると、 $\lambda = l(l+1)$ とおいて $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合を考えるのが一般的で (cf. §6.3.3)、

$$L_l^m [y_l^m] := \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] y_l^m(x) = 0 \quad (5.11)$$

とできる。^{*10} (5.11) の解を $P_l^m(x)$ と表せば、

$$\Theta_l^m(\theta) = P_l^m(\cos \theta) \quad (5.12)$$

^{*8} L_λ^m は線形微分演算子である。

^{*9} Legendre の随伴微分方程式などと呼ぶ文献もある。

^{*10} ここで、 $L_\lambda^m, \Theta_\lambda^m(\theta)$ と $L_l^m, \Theta_l^m(\theta)$ とは全く別の演算子形・関数形であり、本来は $L_{l(l+1)}^m, \Theta_{l(l+1)}^m$ と書くべきなのだろうが、使用頻度や使いやすさ、視認性を考慮すれば、 L_l^m, Θ_l^m とするのが経済的であると考えられよう。脚注*7も参照。

である。

また、 $m = 0$ のときは斉次方程式となって解析が容易になるので、**Legendre の微分方程式**も用意しておこう。

Legendre の微分方程式

$$L_\lambda[y_\lambda] := \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \lambda \right] y_\lambda = 0 \quad (5.13)$$

$$L_l[y_l] := \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + l(l+1) \right] y_l = 0 \quad (5.14)$$

今後、ことあるごとに「Legendre の微分方程式で得られた解析結果を陪微分方程式に拡張する」という手法を取る。

jump to ... 短 §7

5.2.3 Φ の満たす微分方程式 電 P 電通 電 2 量 P 量通 数 食

(5.5) の右側の等号によって直ちに

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi$$

が得られる。この方程式は調和振動子の運動方程式として有名で、一般解は

$$\Phi_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi} \quad (5.15)$$

である。

jump to ... 電 P§7 量 P§7

6 Legendre の陪微分方程式から得られる性質 電通 電 2 量通 数 食

以下、簡単のために $d/dx = D$ と表す。^{*11} ここまで我々は Legendre の陪微分方程式

$$L_{\lambda}^m[y] = (1-x^2)D^2y - 2xDy + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad (6.1)$$

がどのような文脈で得られるかを見てきた。方程式はわかっても、その解(せめてその解の特性)が求まらなければ、物理への応用はできない。とはいえ、この方程式の解を簡潔な形で与えることは容易ではない。そこで本節では Legendre の陪微分方程式から可能な限り解の特性を検討していこう。参考文献は [1] pp. 116, 451-, [4] pp. 103-, [7] pp. 9-, 52- である。

jump to ... 電通 §6.3 量通 §6.3

6.1 陪微分方程式の級数展開 電 2 数 食

2 階線形常微分方程式の解析でまず行われるのが解の級数展開である。具体的には (6.1) の解 $y = P_{\lambda}^m(x)$ を

$$P_{\lambda}^m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (x - x_0)^k$$

の形に仮定して、微分方程式に代入して得られる a_k の漸化式などから一般解を求めようというものである。一般の 2 階線形常微分方程式に対する解析については参考文献に任せるとして、ここでは Legendre の陪微分方程式に特化した解析を行う。

jump to ... 電 2 §6.1.2

6.1.1 特異点解析 数 食

まず初めに行うのが特異点解析である。(6.1) の 2 回微分の係数を 1 にすると

$$D^2y - \frac{2x}{(1-x)(1+x)}Dy + \left(\frac{\lambda}{(1-x)(1+x)} - \frac{m^2}{(1-x)^2(1+x)^2}\right)y = 0 \quad (6.2)$$

となる。以降の議論の簡単のために 1 回微分と 0 回微分の係数を

$$p(x) = -\frac{2x}{(1-x)(1+x)}$$

$$q(x) = \frac{\lambda}{(1-x)(1+x)} - \frac{m^2}{(1-x)^2(1+x)^2}$$

としておこう。「 p, q が共に正則」とならないのは、 $x = \pm 1, \infty$ なのが一瞥できる。^{*12}

$x = \pm 1$ では

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} |(x \pm 1)p(x)| < \infty$$

^{*11} この表記は Euler の記法と呼ばれるものである。微分する変数が自明であるならば、表示がコンパクトになって良い。特に線型微分方程式の分野で有用である。

^{*12} 実数の無限大は正負で 2 つあるが、この手の微分方程式論ではより広範に $x \in \mathbb{C}$ で考えるため、無限遠点は 1 つである。複素数における無限大は Riemann 球面を援用して解釈される。詳しくは [11] など複素解析の文献を参照のこと。

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} |(x \pm 1)^2 q(x)| < \infty$$

より、 $x = \pm 1$ が**確定特異点**であることがわかる。^{*13}

無限遠点の特異点解析は $\xi = 1/x \rightarrow 0$ とするのが常套手段である。(6.1) に ξ を代入して (6.2) 同様に 2 回微分の係数を 1 とすれば

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{2\xi}{(\xi^2 - 1)} \frac{dy}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{\xi^2(\xi^2 - 1)} - \frac{m^2}{(\xi^2 - 1)^2} \right) y = 0$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left| \frac{2\xi}{(\xi^2 - 1)} \right| &< \infty \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \left| \frac{\lambda}{\xi^2(\xi^2 - 1)} - \frac{m^2}{(\xi^2 - 1)^2} \right| &< \infty \end{aligned}$$

より、**無限遠点も確定特異点**であることがわかる。

6.1.2 原点周りの級数展開 電2 数 食

§6.1.1 で見たように、Legendre の陪微分方程式の特異点は $\pm 1, \infty$ の 3 点に限られる。特に原点は正則点であるから、原点周りでは解 P_λ^m を Taylor 展開できる。

微分方程式の解 $y(x)$ は

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

の形で書けよう。ここで、原点から最も近い特異点 ± 1 までの距離が 1 であるから、級数の収束半径は 1 となる。したがってはじめから $x < 1$ を仮定してもよく、(6.1) の 0 回微分の項が

$$\left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = \left(\lambda - m^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) y$$

となることに注意して (6.1) に級数を代入すると、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} [-k(k-1) - 2k + \lambda] a_k x^k - \sum_{k,n=0}^{\infty} m^2 a_k x^{k+2n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1)a_{k+2} + [\lambda - k(k+1)] a_k - \sum_{n=0}^{[k/2]} m^2 a_{k-2n} \right) x^k. \end{aligned}$$

ただし最後の項で、 $[k/2]$ は $k/2$ を超えない最大整数を表す Gauss 記号である。

微分方程式 (6.1) が x の値によらず常に満たされるには、 x^k の係数がそれぞれ 0 すなわち

$$a_{k+2} = -\frac{\lambda - k(k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k + \frac{m^2}{(k+2)(k+1)} \sum_{n=0}^{[k/2]} a_{k-2n} \quad (6.3)$$

が必要である。これが Legendre の陪微分方程式の級数の係数に関する漸化式になる。

^{*13} 領域 $S \in \mathbb{C}$ 上の 2 階線形斉次微分方程式 $u'' + p(z)u' + q(z)u = 0$ を考え、 $c \in S$ にて $\lim_{z \rightarrow c} (z-c)p(z)$, $\lim_{z \rightarrow c} (z-c)^2 q(z)$ が共に有限である特異点 c を**確定特異点**と呼ぶ。これに当たらない特異点を**不確定特異点**と呼ぶ。[7]

a_k が k の偶奇で完全に独立であることに注意しよう。実際、はじめのいくつかを挙げると以下のようになる。

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-\lambda + m^2}{2} a_0 \\ a_3 &= \frac{-\lambda + 2 + m^2}{6} a_1 \\ a_4 &= \frac{-\lambda + 6}{12} a_2 + \frac{m^2}{12} (a_2 + a_0) \\ a_5 &= \frac{-\lambda + 30}{42} a_3 + \frac{m^2}{42} (a_3 + a_1) \end{aligned}$$

ここからわかるように、 a_k が偶数なら a_0 に、奇数なら a_1 に比例する。

(6.1) の解の級数展開は、漸化式 (6.3) によって得られる a_k を用いて

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

で与えられる。 $a_0 \neq 0, a_1 = 0$ で

$$y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

$a_0 = 0, a_1 \neq 0$ で

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

となる。 y_0 と y_1 は (6.1) の独立な 2 解になっているので、Legendre の陪微分方程式の一般解は y_0 と y_1 の線型結合で表される。

より深く解析するために $m = 0$ すなわち Legendre の微分方程式の級数展開を考えてみよう。(6.3) にて $m = 0$ を考えれば

$$a_{k+2} = -\frac{\lambda - k(k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad (6.4)$$

である。複素数 l を用いて $\lambda = l(l+1)$ と表せば、

$$a_{k+2} = -\frac{(l-k)(l+k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad (6.5)$$

よって

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{(l-2k+2)(l+2k-1)}{2k(2k-1)} a_{2k-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{(-1)^k (l-2k+2)(l-2k+4) \cdots l \cdot (l+2k-1)(l+2k-3) \cdots (l+1)}{(2k)!} a_0 \\ a_{2k+1} &= -\frac{(l-2k+3)(l+2k)}{2k(2k+1)} a_{2k-1} \\ &= \dots \\ &= \frac{(-1)^k (l-k+3)(l-2k+5) \cdots (l+1) \cdot (l+2k)(l+2k-2) \cdots (l+2)}{(2k+1)!} a_1 \end{aligned}$$

が得られる。

表 2 低次の Legendre 多項式の表式

l	0	1	2	3	4
$P_l(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

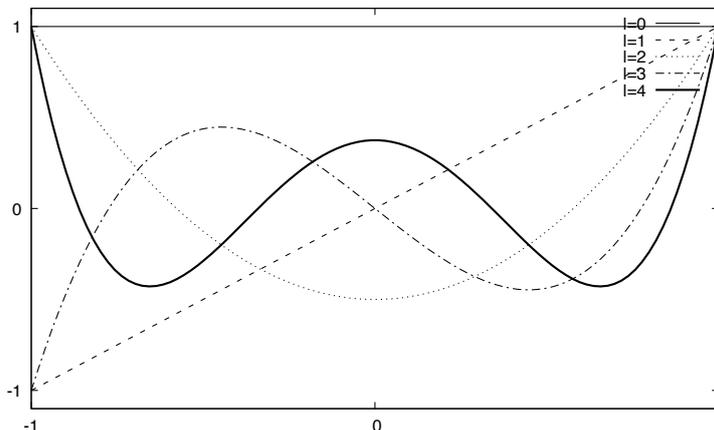


図 1 低次の Legendre 多項式

特に $l \in \mathbb{Z}$ のとき、(6.5) の $(l-k)(l+k+1)$ の効果によって $a_{k_0} = 0$ なる $k_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。かくなる k_0 に対し、 $a_{k_0+2} = a_{k_0+4} = \dots = 0$ であるから、係数は偶奇いずれかが途中で断絶する。つまり Legendre の微分方程式の特解が多項式で与えられる。

この係数が途中で断絶した多項式は一般に「第 1 種 Legendre 関数」「Legendre 多項式」などと呼ばれる。その具体形に関しては、より簡潔な形で表すことができるので、追々みていくことにしよう。多項式型の解と独立な解、すなわち第 1 種 Legendre 関数と偶奇が異なる解は、係数が打ち止めされず無限級数になる。この無限級数は一般に「第 2 種 Legendre 関数」などと呼ばれる。

Legendre 多項式のはじめの数項を挙げると表 2 のようになり、それを描画すれば図 1 のようになる。

6.2 直交性 電 2 数 食

Legendre の微分方程式 (5.13) の解は $x \in [-1, 1]$ で直交性

$$\int_{-1}^1 y_{\lambda}^m(x) y_{\lambda'}^m(x) dx = 0 \quad \text{for } \lambda \neq \lambda' \tag{6.6}$$

を満たすことが知られている。^{*14} すなわち Legendre 多項式は λ について直交関数系を成す。

^{*14} Poisson 方程式の解を取り扱うとき、Legendre の陪微分方程式の解の直交性は m を揃えて議論する。 m が異なる場合は、この方程式の解が直行しなくても、 $\Phi(\varphi)$ の直交性によって

$$\begin{aligned} (R_{\lambda'} \Theta_{\lambda'}^{m'} \Phi_{m'}, R_{\lambda} \Theta_{\lambda}^m \Phi_m) &= (R_{\lambda'} \Theta_{\lambda'}^{m'}, R_{\lambda} \Theta_{\lambda}^m) \int (\Phi_{m'})^* \Phi_m d\varphi \\ &= (R_{\lambda'} \Theta_{\lambda'}^{m'}, R_{\lambda} \Theta_{\lambda}^m) \int e^{i(m-m')\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi \delta_{m,m'} (R_{\lambda'} \Theta_{\lambda'}^{m'}, R_{\lambda} \Theta_{\lambda}^m) \end{aligned}$$

となり、Poisson 方程式の解は直交するからである。

6.2.1 関数の直交性 電2 数 食

関数が直交することについて考える前に、まずはベクトルの直交性を思い出しておこう。ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$ があつたときに、これらが直交するとは

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_i u_i v_i = 0$$

で定義されるのであつた。すなわちベクトルが $i = 1, 2, \dots$ によってラベリングされており、各ラベルについて積を取って足し上げるというものである。

これを関数の直交性に援用しよう。区間 I 上の関数 $f(x), g(x)$ は x によってラベリングされていると考えたと、

$$(f, g) := \int_I f(x)g(x)dx = 0$$

とすればよさそうである。

しかし、内積の定義には双線型性 $(f, \lambda g) = (\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ と正值性 $(f, f) \geq 0$ が必要であり、上記の定義では $f(x), g(x)$ が複素数値を取つたとき (例えば $f(x) = g(x) = i$ のとき) に正值性を満たさない。そこで左側の関数について複素共役をとり、

$$(f, g) := \int_I f^*(x)g(x)dx = 0$$

と定義しよう。電磁気など実数値関数しか扱わない場面において複素共役は不要だが、量子力学を含め一般の議論では必要不可欠であることに注意しよう。

6.2.2 Legendre の陪微分方程式の解における直交性の証明 電2 数 食

それでは Legendre の陪微分方程式の解に直交性があることを示していこう。

線形微分方程式の解が直交であることの証明では、 $L_{\lambda'}^m[y_{\lambda'}^m(x)] = 0$ を使って

$$\int y_{\lambda}^{m*}(x)L_{\lambda'}^m[y_{\lambda'}^m(x)]dx = 0 \quad \text{for } (\lambda \neq \lambda')$$

を出発点とするのが常套手段である。部分積分を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 y_{\lambda}^{m*} \left[D((1-x^2)Dy_{\lambda'}^m) + \lambda' y_{\lambda'}^m - \frac{m^2}{1-x^2} y_{\lambda'}^m \right] dx \\ &= [y_{\lambda}^{m*}(1-x^2)Dy_{\lambda'}^m]_{x=-1}^{x=1} + \int_{-1}^1 \left[(x^2-1)(Dy_{\lambda}^*)Dy_{\lambda'}^m + \left(\lambda' - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y_{\lambda}^{m*} y_{\lambda'}^m \right] dx \\ &= [(x^2-1)(Dy_{\lambda}^{m*})y_{\lambda'}^m]_{x=-1}^{x=1} + \int_{-1}^1 \left[-D[(x^2-1)Dy_{\lambda}^{m*}]y_{\lambda'}^m + \left(\lambda' - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y_{\lambda}^{m*} y_{\lambda'}^m \right] dx \\ &= (\lambda' - \lambda) \int_{-1}^1 y_{\lambda}^{m*} y_{\lambda'}^m dx \quad \because (5.13) \end{aligned}$$

となる。 $\lambda \neq \lambda'$ のときは積分が0となるので、直交性が示された。

6.3 Poisson 方程式の一般的な境界条件とパラメーター λ, m の制限 電通 電2 量通 数 食

Poisson 方程式 (5.1) を純粹に数学的な興味から扱うのであれば、 λ や m といった定数は複素数にとるべきであろう。しかし我々がとりあえず求めたいのは3次元空間内における極座標 Poisson 方程式の一般解であ

る。もし適切な境界条件を付すことによってこれらのパラメーターが制限されるのであれば、これに越したことはない。

そこで本節では、物理の問題で広く要求される境界条件のもとで λ や m といった定数が満たすべき条件を求めていこう。

6.3.1 φ に関する一般的な境界条件と m の制限 電通 電2 量通 数 食

初めに、解が求まっている $\Phi(\varphi)$ について一般に要求される境界条件を与えることで、 m の値を絞っていく。

§4 で挙げたような状況では基本的に $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi$ としても不変であることが要求される。これは (5.15) が $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi$ の変換で不変、すなわち ϕ の値がただ一つに定まる (1 価関数になる) というものである。^{*15} 従って複号同順で

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad \text{i.e.} \quad e^{\pm im\varphi} = e^{\pm im\varphi} e^{\pm 2\pi mi}$$

となるので、

パラメーター m に関する条件

$$m \in \mathbb{Z} \tag{6.7}$$

に限られる。

6.3.2 θ に関する Legendre の微分方程式の一般的な境界条件と λ の制限 電通 電2 量通 数 食

一般に与えられるもう一つの条件として、 $0 \leq \theta \leq \pi$ にて ϕ が正則 (値が発散しない) というものがある。^{*16} この条件を求めるために、まず $\theta \approx 0, \pi$ での挙動を調べよう。

はじめは $m = 0$ の Legendre の微分方程式における条件を検討する。(6.4) において $k \rightarrow \infty$ を考えると $a_{k+2} \sim a_k$ である。 $x \rightarrow \pm 1$ を考えると、 $a_l = 0$ なる $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がなければ

$$y_\lambda(x \rightarrow \pm 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_{2k} \pm a_{2k+1}) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} (2ka_{2k} \pm (2k+1)a_{2k+1})$$

となってしまう。(5.9) の $x = \cos \theta$ は 1 にも -1 にもなりうることを考えれば右辺は無限大に発散するので、係数 a_k はどこかしらで打ち止めされていなければならない。従って、 $m = 0$ のときに Legendre の微分方程式の解が正則であるためには、級数展開の係数 (6.4) が

$$\exists l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{s.t.} \quad a_{l+2} = -\frac{\lambda - l(l+1)}{(l+2)(l+1)} = 0$$

を満たすことが要求される。ゆえに

$$\lambda = l(l+1) \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{6.8}$$

が必要となる。

^{*15} この条件が破れるのは、例えば $\varphi = \varphi_0$ に壁のような不連続面が入っているような場合である。複素対数関数に代表される分枝切断を想像してもらえればわかりやすいだろう。ご存知の通り、物理ではそのような不連続性による不都合は断りのない限り考えないのが通例である。

^{*16} この条件が破れるのは、例えば直線状電荷が原点を貫いているときなどである。このような状況では、少なくとも電磁気学では別の方法 (Gauss の発散定理を用いた方法・鏡像法・等角写像を用いた方法など。[1] など参照) で対処できる問題が多い。量子力学でこの条件が破れる事例は考えにくい。

6.3.3 θ に関する Legendre の陪微分方程式の一般的な境界条件と λ の制限 電通 電2 量通 数 食

一般の m については、実際に解を構成してからでないで条件を示すのが困難である。ここでは天下一になるが、後に §7.3 で与える Legendre 陪多項式を特解として認め、議論を進める。出発点は (5.10) を移項した固有方程式

$$\left(D((1-x^2)D) - \frac{m^2}{(x-1)(x+1)} \right) y_\lambda^m = -\lambda y_\lambda^m \quad (6.9)$$

とする。^{*17} 与えられた m に対して異なる固有値 $\lambda < \lambda'$ を与える固有関数 $y_\lambda^m, y_{\lambda'}^m$ を用いて、

1. $y_{\lambda'}^m$ の零点の数は y_λ^m より多いことを示す
2. $\lambda = l(l+1)$ のときに、特解である Legendre 陪多項式の零点が高々 $l-m$ 個しかないことを示す

の手順で条件を導こう。

まずは手順 1 から取り掛かる。

$x = \pm 1$ で正則な解が

$$y_\lambda^m(x) = (x \mp 1)^\mu \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_k (x \mp 1)^k \quad (\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と展開されるとして代入すると、 $x \approx \pm 1$ で最低次の項は

$$\mu(\mu-1)(x \mp 1)^{\mu-2} + \frac{2 \cdot (\pm 1)}{\pm 2(x \mp 1)} \mu(x \mp 1)^{\mu-1} - \frac{m^2}{4}(x \mp 1)^{\mu-2} + O((x \mp 1)^{\mu+1}) \approx \frac{\lambda}{\pm 2}(x \mp 1)^{\mu-1}$$

であり、微分方程式が成り立つには左辺の係数が 0 すなわち

$$\mu(\mu-1) + \mu - \frac{m^2}{4} = 0 \quad i.e. \quad \mu = \pm \frac{m}{2}$$

が得られる。^{*18}

$\lambda < \lambda'$ のもとで異なる固有方程式の解 $y_\lambda^m, y_{\lambda'}^m$ が $x = -1$ で正則としよう。すなわち $y_\lambda^m, y_{\lambda'}^m$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \left(D((1-x^2)D) - \frac{m^2}{(x-1)(x+1)} \right) y_\lambda^m = -\lambda y_\lambda^m \\ \left(D((1-x^2)D) - \frac{m^2}{(x-1)(x+1)} \right) y_{\lambda'}^m = -\lambda' y_{\lambda'}^m \end{cases}$$

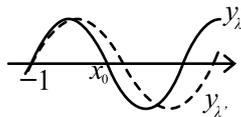
を満たし、また Taylor 展開できて

$$y_\lambda^m(x = -1) = \left[(x+1)^{|m|/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+1)^k \right]_{x=-1} = 0$$

$$y_{\lambda'}^m(x = -1) = \left[(x+1)^{|m|/2} \sum_{k=0}^{\infty} a'_k (x+1)^k \right]_{x=-1} = 0$$

^{*17} 演算子 \hat{O} とスカラー O について $\hat{O}y = Oy$ を満たす方程式を固有方程式と呼び、 O を固有値、 y を固有関数と称す。(6.9) は $D((1-x^2)D) - \frac{m^2}{(x-1)(x+1)}$ を演算子と見たときに $-\lambda$ が固有値となる固有方程式である。

^{*18} ここでは μ の具体形を求めるよりも、 $\mu \geq 0$ となる解が存在することを使う。以下度々 $(x+1)^{|m|/2}$ という形式が現れるが、どれも「負冪でない関数」と捉えておけば十分である。

図2 $y_{\lambda'}^m$ の零点が x_0 までに存在しない場合

であるものとする。固有方程式の両辺にスカラーをかければわかるとおり、固有関数のスカラー倍も固有関数であるから、先頭の係数 $a_0 = a'_0 = 1$ とすることができる。このとき $y_{\lambda}^m, y_{\lambda'}^m \approx (x+1)^{|m|/2}$ なので、 $Dy_{\lambda}^m(x=-1), Dy_{\lambda'}^m(x=-1) > 0$ となる。

この条件下で $y_{\lambda'}^m$ は y_{λ}^m の次の零点 x_0 と -1 との間に零点を持つことを背理法で証明する。Wronskian を

$$W \equiv (1-x^2)(y_{\lambda'}^m Dy_{\lambda}^m - y_{\lambda}^m Dy_{\lambda'}^m) \quad (6.10)$$

で定めよう。^{*19} これを x で微分すると

$$\begin{aligned} DW &= D[y_{\lambda'}^m \cdot (1-x^2)Dy_{\lambda}^m - y_{\lambda}^m \cdot (1-x^2)Dy_{\lambda'}^m] \\ &= Dy_{\lambda'}^m \cdot (1-x^2)Dy_{\lambda}^m + y_{\lambda'}^m D[(1-x^2)Dy_{\lambda}^m] - Dy_{\lambda}^m \cdot (1-x^2)Dy_{\lambda'}^m - y_{\lambda}^m D[(1-x^2)Dy_{\lambda'}^m] \\ &= -y_{\lambda'}^m \lambda y_{\lambda}^m + y_{\lambda'}^m \frac{m^2}{x^2-1} y_{\lambda}^m + y_{\lambda'}^m \lambda' y_{\lambda}^m - y_{\lambda}^m \frac{m^2}{x^2-1} y_{\lambda'}^m \quad \because (6.9) \\ &= (\lambda' - \lambda) y_{\lambda}^m y_{\lambda'}^m \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq x \leq x_0$ に $y_{\lambda'}^m$ の零点がないと仮定すると、図2に示す通りこの範囲では $y_{\lambda}^m, y_{\lambda'}^m$ とともに正である。従って

$$DW = (\lambda' - \lambda) y_{\lambda}^m y_{\lambda'}^m > 0.$$

Wronskian の初期値が $W(x=-1) = 0$ であるから、 $W > 0$ ($-1 \leq x \leq x_0$) が得られる。一方図2からもわかるとおり、 y_{λ}^m は x_0 近傍で減少関数である。すると (6.10) より、 y_{λ}^m の零点 x_0 にて

$$\begin{aligned} W(x_0) &= (1-x_0^2)(y_{\lambda'}^m Dy_{\lambda}^m - 0) \quad \because y_{\lambda}^m(x_0) = 0 \\ &< 0 \end{aligned}$$

となり矛盾する。よって $y_{\lambda'}^m$ の零点の数は y_{λ}^m より多いことがわかった。

続いて手順2に入ろう。以下、Legendre の陪微分方程式の特解として

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2-1)^l$$

を与える。条件として、 $\lambda = l(l+1)$ であり、 $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, l$ にて解となっていること、さらに

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

^{*19} $\{f_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ の Wronskian は一般に

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

で定義されるが、今回は固有方程式による変形を見込んで係数に $1-x^2$ を付している。

を認め、 $m < 0$ の場合はこの式によって

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l - |m|)! (1 - x^2)^{|m|/2}}{(l + |m|)! 2^{|m|} l!} D^{l+|m|} (x^2 - 1)^l$$

としておこう。つまり、以下では $m \geq 0$ とする。

先に非負整数 m を与え、 l を動かして考える。 $l < |m|$ のときは $(x^2 - 1)^l$ が高々 $2l$ 次の多項式であるのに対して微分回数が $2l$ を超えるので、 $P_l^m(x) = 0$ となる。 $l = |m|$ のとき微分からは最高次の項からの寄与だけが残り、

$$P_l^l(x) = \frac{(1 - x^2)^{l/2}}{2^l l!} \cdot 2l(2l - 1) \cdots (l + 1)$$

となる。右辺は $-1 < x < 1$ に零点を持たない。 $l > |m|$ のときは $(x^2 - 1)^l$ が $2l$ 次の多項式であり、それを $l + m$ 回微分するので $D^{l+m}(x^2 - 1)^l$ は高々 $l - m$ 次の多項式である。 P_l^m 右辺の微分より左に零点を与える関数がないので、 P_l^m は $-1 < x < 1$ に零点を高々 $l - m$ 個しか持たないことがわかる。

従って $P_0^m, P_1^m, \dots, P_m^m$ は $-1 < x < 1$ に零点がない。また手順 1 で示した通り、 l の増加によって零点は必ず増えるので、 $l > |m|$ のとき P_l^m の零点はちょうど $l - m$ である。

さて、仮に $l < 0$ であるとしよう。手順 1 から、零点の数は P_l^m よりも P_0^m の方が多いはずである。しかし P_0^m は任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して零点がないので、これは矛盾する。今度は非負整数 l_0 を使って $l_0 < l < l_0 + 1$ と書けるとしよう。手順 1 で示したことから、 P_l^m の零点の数は $P_{l_0}^m$ の零点の数 $l_0 - m$ より多く $P_{l_0+1}^m$ の零点の数 $l_0 + 1 - m$ より少ないはずである。そのような関数は存在し得ないので、これもやはり矛盾する。

以上より、 l は $|m|$ を下回らない整数であることが必要だとわかった。本節で得られた条件をまとめると、

パラメーター λ に関する条件

$$\lambda = l(l + 1) \tag{6.11}$$

$$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{6.12}$$

$$l \geq |m| \tag{6.13}$$

である。

7 Rodrigues の公式 短 電 P 電通 電 2 量 P 量通 数 食

Legendre の陪微分方程式 (5.10) の一般解をダイレクトに求めても、係数が (6.3) で与えられる無限級数の形式で書かれているために、この解が満たす様々な性質を見るのは困難である。

ここでは先人の研究にあやかっ、Rodrigues の公式を用いることにしよう。これが Legendre の陪微分方程式の特解であることがわかれば、とりあえず実用に耐える。また、一足飛びに Legendre の陪微分方程式の特解であることを示すのも骨が折れるので、一度 $m = 0$ で考え、それをもとに m の値を変えていくという手法を取ろう。

参考文献は [3] pp. 139- [6] pp. 40-, 112-, です。

jump to ... 短 §7.2 電 P§7.2 電通 §7.2 量 P§7.2

7.1 Rodrigues の公式概論 電 2 量 P 量通 数 食

唐突ですが、定義域 $I \subset \mathbb{R}$ 上で可積分な正の関数 $w(x)$ を用意する。つまり

$$\left| \int_I w(x) dx \right| < \infty$$

である。この w を一般に重み関数などと表現する。 x の高々 2 次の整式 $X(x)$ と重み関数 w 及び定数 C を使って

Rodrigues の公式

$$u_n(x) = \frac{C}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)X^n) \quad (7.1)$$

と表される式を一般に **Rodrigues の公式** と呼ぶ。

7.1.1 Rodrigues の公式から得られる種々の直交関数系 電 2 量 P 量通 数 食

もちろん (7.1) は Legendre の陪微分方程式を解くにあたって有用だが、それだけでなく物理学で多用される数々の直交多項式をも与えられる。 w, X, C の値によって表 3 のように分類される。

表3 Rodrigues の公式による直交関数の例

記号	名称	定義域	$w(x)$	C	$X(x)$
$P_n(x)$	Legendre 多項式	$[-1, 1]$	1	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$1 - x^2$
$T_n(x)$	Chebyshev 多項式	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}$	$1 - x^2$
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ 注	Jacobi 多項式	$[-1, 1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$1 - x^2$
$L_n(x)$	Laguerre 多項式	$[0, \infty)$	e^{-x}	1	x
H_n	Hermite 多項式	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$(-1)^n$	1

注 パラメーターは $\alpha, \beta > -1$ に制限される。

量子力学などで特に出会うであろう Hermite 多項式や Laguerre 多項式も Rodrigues の公式の一例である。定義域が有限の場合、重み関数は多項式で十分だが、定義域全域で収束させるためには、半無限の Laguerre では $w = e^{-x}$ に、両無限の Hermite では e^{-x^2} にしなければならない。

jump to ... 量 P §7.1.4 量通 §7.1.3

7.1.2 Rodrigues の公式が n 次多項式であることの証明 電2 数食

以下ではこうした Rodrigues の公式が直交関数系であることなどを導出するわけだが、そもそもこの馬の骨とも知れぬ (7.1) が n 次多項式になっていることを確認しなければならない。Legendre 多項式を考える分には n 次多項式であることは自明なのでこの確認は不要だが、一般には w が分母に現れたり w が多項式関数ではなかったりすることから、必要不可欠となる。

有限区間 $I = [a, b]$ で証明しよう。 $w(x) = (x-a)^\alpha(b-x)^\beta$, $X(x) = (x-a)(b-x)$, $\alpha, \beta > -1$ とすれば表 3 に挙げられた有限区間の Rodrigues の公式は全て調べ上げられる。半無限の場合は $w(x) = (x-a)^\nu e^{-x}$, $X(x) = x-a$, $\nu > -1$ を、両無限は $w(x) = e^{-x^2}$, $X(x) = 1$ を仮定すれば同様に証明できる。

以下、 $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ と表すことにする。^{*20} $w(x)X^n = (x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}$ に Leibnitz rule を適用すれば

$$\begin{aligned} D^n(wX^n) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^k(x-a)^{n+\alpha}) (D^{n-k}(b-x)^{n+\beta}) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((n+\alpha)_k (x-a)^{n+\alpha-k}) ((n+\beta)_{n-k} (-1)^{n-k} (b-x)^{\beta+k}) \end{aligned}$$

となるので、 $D^n(wX^n)$ は $n + \alpha + \beta$ 次多項式である。これを $\alpha + \beta$ 次多項式 w で割った (7.1) は n 次多項式になる。

^{*20} Pochhammer 記号と呼ばれる。文献によっては昇幕で定義するので注意。

7.1.3 Rodrigues の公式の直交性 電2 量通数食

Rodrigues の公式が表3の直交関数を表すという以上、(7.1)は直交関数系になっているはずである。ただし内積は重み関数を伴い、かつ実関数であることから、直交関係は

$$\int_I u_m(x)u_n(x)w(x)dx \propto \delta_{m,n} \quad (7.2)$$

とする。

有限区間 $I = [a, b]$ で証明する。 $w(x) = (x-a)^\alpha(b-x)^\beta$, $X(x) = (x-a)(b-x)$, $\alpha, \beta > -1$ とすれば表3に挙げられた有限区間の Rodrigues の公式は全て調べ上げられる。半無限の場合は $w(x) = (x-a)^\nu e^{-x}$, $X(x) = x-a$, $\nu > -1$ を、両無限は $w(x) = e^{-x^2}$, $X(x) = 1$ を仮定すれば同様に証明できる。

それでは内積(7.2)を計算していこう。 $n = m$ では内積の正值性から0以上であり、 $u_n(x) \neq 0$ なる x が必ず存在するので、内積は値を持つ。そこで $m < n$ として部分積分を使うと

$$\begin{aligned} & \int_a^b u_m(x)u_n(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b u_m(x)D^n((x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta})dx \\ &= [u_m(x)D^{n-1}((x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta})]_a^b - \int_a^b Du_m(x) \cdot D^{n-1}((x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta})dx. \end{aligned}$$

ここで、右辺第1項の内部は

$$D^{n-1}((x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}) = (x-a)^{1+\alpha}(b-x)^{n+\beta} + \dots + (x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{1+\beta}$$

となるので、境界 $x = a, b$ で消去される ($\alpha, \beta > -1$ に注意)。従って部分積分を続けると

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x)w(x)dx = (-1)^n \int_a^b D^n u_m(x) \cdot ((x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta})dx = 0$$

となる。これで直交性が示せた。

7.1.4 Rodrigues の公式の満たす微分方程式 電2 量P 量通数食

結論を先に提示すれば、Rodrigues の公式(7.1)は微分方程式

$$\frac{1}{w(x)}D(w(x)X(x)Du_n(x)) = \lambda_n u_n(x), \quad \lambda_n = nu_1'(x) + \frac{n(n-1)}{2}X''(x) \quad (7.3)$$

を満たす。逆に、この方程式が Legendre の微分方程式や Hermite の微分方程式などを与える。

証明は以下のように行う。

(7.3) 第1式左辺を計算して

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(x)}D(w(x)X(x)Du_n(x)) &= \frac{1}{w(x)}D(w(x)X(x))Du_n(x) + X(x)D^2u_n \\ &= u_1(x)Du_n(x) + X(x)D^2u_n \end{aligned}$$

より、左辺は n 次式。表3を見れば $w(x)X(x)$ が境界部分で0になっているので、左辺と u_m との内積を(7.2)により部分積分で計算すると、

$$\left(\frac{1}{w}D(wXDu_n), u_m \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_I \frac{1}{w(x)} D(w(x)X(x)Du_n(x)) u_m(x)w(x)dx \\
&= [u_m(x)w(x)X(x)Du_n(x)]_I - \int_I w(x)X(x)Du_m(x) \cdot Du_n(x)dx \\
&= -[u_n(x)w(x)X(x)Du_m(x)]_I + \int_I u_n(x)D(w(x)X(x)Du_m(x)) dx \\
&= \left(u_n, \frac{1}{w} D(wXD u_m) \right)
\end{aligned}$$

が得られる。^{*21} ここで $n \geq m$ とし、 n 次式である (7.3) 第 1 式左辺が

$$\frac{1}{w} D(wXD u_n) = \sum_{k=0}^n \lambda_k u_k \quad (\lambda_n \neq 0)$$

と書けると仮定しよう。上記の内積は、左辺が

$$\left(\frac{1}{w} D(wXD u_n), u_m \right) = \lambda_m (u_m, u_m)$$

であり、右辺は

$$\left(u_n, \frac{1}{w} D(wXD u_m) \right) = (u_n, O(x^m))$$

である。 $n > m$ のときは $(u_n, O(x^m)) = 0$ である一方、内積の正値性から $(u_m, u_m) > 0$ であるから、 $\lambda_m = 0$ となる。よって

$$\frac{1}{w} D(wXD u_n) = \lambda_n u_n$$

となり、(7.3) の第 1 式を満たす λ_n が存在する。^{*22}

次いで (7.3) 第 1 式両辺の最高次の係数を比較する。 $u_n(x) = \alpha_n x^n + O(x^{n-1})$, $X(x) = X_0 x^2 + O(x)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w} D(wXD u_n) &= \frac{1}{w} D(wX) Du_n + X D^2 u_n \\
&= u_1 D \alpha_n x^n + X(x) D^2 \alpha_n x^n + O(x^{n-1}) \\
&= (\alpha_1 x + O(x^0)) \alpha_n n x^{n-1} + (X_0 x^2 + O(x)) \alpha_n n(n-1) x^{n-2} + O(x^{n-1}) \\
&= (n \alpha_1 + n(n-1) X_0) \alpha_n x^n + O(x^{n-1}) \\
&= \left(n u_1'(x) + \frac{X''(x)}{2} n(n-1) \right) \alpha_n x^n + O(x^{n-1})
\end{aligned}$$

となるので、(7.3) 第 2 式が得られる。

7.2 Rodrigues の公式による Legendre 多項式 短電P 電通電2 量P 量通数食

Legendre の微分方程式 (5.14) と Rodrigues の公式が満たす微分方程式 (7.3) を見比べてみると、 $w(x) = 1$, $X(x) = 1 - x^2$, $\lambda_n = -l(l+1)$ とすれば良いことがわかる。従って Legendre の微分方程式に対する Rodrigues の公式は

$$P_l(x) \propto \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l$$

^{*21} 演算子 $\hat{O} = \frac{1}{w(x)} Dw(x)X(x)D$ が $(\hat{O}u_n, u_m) = (u_n, \hat{O}u_m)$ を満たす、すなわち Hermite 演算子であることを示したことになる。

^{*22} 演算子 $\frac{1}{w(x)} Dw(x)X(x)D$ の固有方程式となっている。

と表せよう。通常、定数は正規化した形から求めるのだが、こと直交関数系に関しては $x = 1$ での値が 1 となるように揃えることが多い。これを踏まえると

Legendre 多項式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (7.4)$$

となる (証明 §7.2.1)。

また、この表式で P_l は Legendre の微分方程式を満たす l 次多項式であるから (§7.1.4, §7.2.2 参照)、(6.5) を係数とする原点周りの級数展開とみなすことができるだろう。ゆえに P_l を **l 次 Legendre 多項式** と呼ぶ。

jump to ... 短 §7.3 電 P §7.2.2 電通 §7.2.2 量 P §7.2.2 量通 §7.2.2 電 2 §7.2.2

7.2.1 Legendre 多項式の定数係数の決定 数 食

さて、上で注意したように直交関数系ではノルムを 1 に揃える通常の正規化の代わりに $x = 1$ での値が 1 となるような標準化

$$P_l(1) = \left(\frac{1}{2^l l!} D^l (x^2 - 1)^l \right)_{x=1} = 1 \quad (7.5)$$

を行う。ここでは係数 $\frac{1}{2^l l!}$ によって標準化されていることを証明していこう。

P_l の微分を帰納的に実行する。まず $l = 0$ では自明に

$$\frac{1}{2^0 0!} D^0 (x^2 - 1)^0 = 1$$

となる。 l まで (7.5) が成り立っているとして、 $l + 1$ では

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{l+1} (l+1)!} D^{l+1} (x^2 - 1)^{l+1} &= \frac{1}{2^{l+1} l!} D^l ((x^2 - 1)^l \cdot 2x)_{x=1} \\ &= \frac{1}{2^{l+1} l!} [2x D^l (x^2 - 1)^l - 2 D^{l-1} (x^2 - 1)^l]_{x=1} \\ &= \frac{1}{2^l l!} D^l (x^2 - 1)^l - \frac{1}{2^l l!} D^{l-1} (x^2 - 1)^l_{x=1} \end{aligned}$$

となる。第 1 項は仮定から 1 になる。第 2 項は

$$\begin{aligned} D^{l-1} (x^2 - 1)^l &= D^{l-1} [(x+1)^l (x-1)^l] \\ &= (x+1)^l D^{l-1} (x-1)^l + l D (x+1)^l D^{l-2} (x-1)^l + \dots \\ &= \propto (x-1) \\ &\xrightarrow{x=1} 0 \end{aligned}$$

となるので、(7.5) が証明された。

7.2.2 Legendre の微分方程式の解であることの別証明 電 P 電通 電 2 量 P 量通 数 食

二度手間ではあるが、Legendre 多項式 (7.4) が Legendre の微分方程式 (5.14) の解であることを直接示しておこう。

(7.4) を (5.14) に入れて両辺 $2^l l!$ をかけると、左辺 L は

$$L = [(1 - x^2)D^2 - 2xD + l(l+1)]D^l (x^2 - 1)^l$$

$$= [(1-x^2)D^{l+2} - 2xD^{l+1} + l(l+1)D^l](x^2-1)^l$$

である。右辺第1項に着目すると Leibnitz rule によって

$$\begin{aligned} & (1-x^2)D^{l+2}(x^2-1)^l \\ &= D^{l+2}[(1-x^2)(x^2-1)^l] - (l+2)[D(1-x^2)][D^{l+1}(x^2-1)^l] \\ &\quad - \binom{l+2}{2}[D^2(1-x^2)][D^l(x^2-1)^l] - \binom{l+2}{3}[D^3(1-x^2)][D^{l-1}(x^2-1)^l] - \dots \\ &= -D^{l+1}D(x^2-1)^{l+1} + 2(l+2)xD^{l+1}(x^2-1)^l + (l+2)(l+1)D^l(x^2-1)^l \end{aligned}$$

を得る。^{*23} さらにこの第1項は

$$\begin{aligned} & -D^{l+1}D(x^2-1)^{l+1} \\ &= -(l+1)D^{l+1}[2x(x^2-1)^l] \\ &= -(l+1)[2xD^{l+1}(x^2-1)^l + 2(l+1)DxD^l(x^2-1)^l] \end{aligned}$$

と表されるので、

$$\begin{aligned} L &= \begin{array}{ll} -2(l+1)xD^{l+1}(x^2-1)^l & -2(l+1)^2D^l(x^2-1)^l \\ +2(l+2)xD^{l+1}(x^2-1)^l & (l+2)(l+1)D^l(x^2-1)^l \\ -2xD^{l+1}(x^2-1)^l & +l(l+1)D^l(x^2-1)^l \end{array} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

以上より、Legendre 多項式 (7.4) が Legendre の微分方程式 (5.14) の解であることが直接的に示された。

jump to ... 電 P§7.3 電通 §7.3 量 P§7.3 量通 §7.3

7.2.3 Legendre 多項式の直交性 電2 数食

Rodrigues の公式が直交関数系をなすことから Legendre 多項式 (7.4) が直交関数系となるのはいうまでもないが、まだ添字が揃った場合の値を求めている。本節では次数が等しい Legendre 多項式の内積を求め、そのついでに Legendre 多項式から直接直交性を示していこう。

n 次の Legendre 多項式は n 次式であるから、 x^n は n 次までの Legendre 多項式の線形和で書けるはずである。これをもとに

$$\int_{-1}^1 x^n P_l(x) dx \tag{7.6}$$

を計算しよう。ここでは Legendre 多項式を

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} D^l(x^2-1)^l = \frac{1}{(2l)!!} D^l(x^2-1)^l \tag{7.7}$$

の形で表しておく。^{*24} 部分積分によって

$$\int_{-1}^1 x^n P_l(x) dx = \frac{1}{(2l)!!} \int_{-1}^1 x^n D^l(x^2-1)^l dx$$

^{*23} Leibnitz rule によって、 $D^n(AB) = AD^n B + nDAD^{n-1}B + \binom{n}{2} D^2AD^{n-2}B + \dots$ となる。「何番目の微分演算子で A が微分されるか」の場合の数を足し合わせていると考えればわかりやすいだろう。

^{*24} $n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\dots 1 & (n \text{ が奇数}) \\ n(n-2)(n-4)\dots 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$ を使うと表式が僅かながら綺麗になる。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2l)!!} \left([x^n D^{l-1}(x^2-1)^l]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 nx^{n-1} D^{l-1}(x^2-1)^l \right) \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{(2l)!!} (-1)^k \int_{-1}^1 n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} D^{l-k}(x^2-1)^l dx \\
&= \frac{(-1)^k n!}{(2l)!!(n-k)!} \int_{-1}^1 x^{n-k} D^{l-k}(x^2-1)^l dx
\end{aligned}$$

となる。

1. $n < l$ の場合

$k = n$ として積分を計算すると

$$\int_{-1}^1 D^{l-n}(x^2-1)^l dx = [D^{l-n-1}(x^2-1)^l]_{-1}^1$$

である。 $D^{l-n-1}(x^2-1)^l$ は (x^2-1) を因数に持つので、右辺の値は 0 となる。

2. $l \leq n$ の場合

$k = l$ として積分を計算すると

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 x^{n-l}(x^2-1)^l dx \\
&= \left[\frac{1}{n-l+1} x^{n-l+1}(x^2-1)^l \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{2l}{n-l+1} x^{n-l+2}(x^2-1)^{l-1} dx \\
&= -\frac{2l}{n-l+1} \left(\left[\frac{1}{n-l+3} x^{n-l+3}(x^2-1)^{l-1} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{2(l-1)}{n-l+3} x^{n-l+4}(x^2-1)^{l-2} dx \right) \\
&= \dots \\
&= \frac{(-1)^l 2l \cdot 2(l-1) \dots 2}{(n-l+1)(n-l+3) \dots (n-l+2l-1)} \int_{-1}^1 x^{n-l+2l} dx \\
&= \frac{(-1)^l (2l)!!}{(n-l+1)(n-l+3) \dots (n-l+2l-1)} \times \begin{cases} 0 & (n+l \text{ is odd}) \\ \frac{2}{n+l+1} & (n+l \text{ is even}) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。

よって $l \leq n$ かつ $n+l$ が偶数のときに限り (7.6) は値をもち、

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^l n!}{(2l)!!(n-l)!} \frac{(-1)^l (2l)!!}{(n-l+1)(n-l+3) \dots (n-l+2l-1)} \frac{2}{n+l+1} \\
&= \frac{2 \cdot n!}{(n-l)!(n-l+1)(n-l+3) \dots (n+l+1)}
\end{aligned}$$

である。

さて、我々が求めたいのは Legendre 多項式の直交性であった。 P_l は最高次数が l 次の多項式であり、 $P_{l'}$ は l' 次の多項式である。まず $l \neq l'$ のときは、場合分け 1 における $(l, n) = (l, l')$ または $(l, n) = (l', l)$ の場合に相当するので、

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = 0$$

が成り立つ。一方 $l = l'$ のとき Legendre 多項式 (7.7) の最高次の係数を求めると、

$$P_l(x) = \frac{1}{(2l)!!} D^l x^{2l} + O(x^{l-1}) = \frac{(2l)!}{(2l)!!!} x^l + O(x^{l-1})$$

である。したがって場合分け 2 をもとに、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{(2l)!}{(2l)!!!} x^l P_{l'}(x) dx \\ &= \frac{(2l)!}{(2l)!!!} \frac{2 \cdot l!}{0!(2l+1)!!} \\ &= \frac{2l(2l-1) \cdots 1 \cdot 2}{2l(2l-2) \cdots 2 \cdot (2l+1)(2l-1) \cdots 1} \\ &= \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

が得られる。

以上によって、Legendre 多項式の直交性は

Legendre 多項式の直交性

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (7.8)$$

となる。

7.3 Rodrigues の公式による Legendre 陪多項式 短電P 電通電2 量P 量通数食

Legendre 多項式は Legendre の微分方程式で $m = 0$ という特別な場合に対してのみ適用できるものである。特に Poisson 方程式 (5.1) が φ について対称である場合は $m = 0$ となるが、一般には $m \neq 0$ を無視することはできない。§6.3.1 でみた通り $m \in \mathbb{Z}$ を考えれば十分であるから、以下では Legendre 多項式 (7.4) を $m \in \mathbb{Z}$ にまで拡張する。

Legendre 陪多項式

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2-1)^l \quad (7.9)$$

$y_l^m(x) = P_l^m(x)$ は Legendre の陪微分方程式 (5.11) の特解である (証明 §7.3.2)。この性質のゆえに、(7.9) を **Legendre 陪多項式** と呼ぶ。^{*25}

jump to ... 短 §8 電 P §7.3.2 電通 §7.3.2 量 P §7.3.2 量通 §7.3.2

7.3.1 $m < 0$ での Legendre 陪多項式 電2 数食

Legendre 陪多項式 (7.9) では $m < 0$ の形も許され、

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \quad (7.10)$$

^{*25} 随伴 Legendre 多項式と称する文献もある。

である。以下、これを証明しよう。

D^{l+m} を D^{l-m} で表現したいので、

$$\begin{aligned} D^{l+m}(x^2-1)^l &= D^{l+m}[(x+1)^l(x-1)^l] \\ &= \sum_{k=0}^{l+m} \binom{l+m}{k} D^k(x+1)^l \cdot D^{l+m-k}(x-1)^l \end{aligned}$$

としておく。 $0 \leq k \leq m-1$ では $D^{l+m-k}(x-1)^l = 0$ であり、 $l+1 \leq k \leq l+m$ では $D^k(x-1)^l = 0$ であるから、総和のうち残る部分だけを取り出して計算すると、

$$\begin{aligned} & D^{l+m}(x^2-1)^l \\ &= \sum_{k=m}^l \binom{l+m}{k} D^k(x+1)^l \cdot D^{l+m-k}(x-1)^l \\ &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l+m}{m+k} D^{m+k}(x+1)^l \cdot D^{l-k}(x-1)^l \\ &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l+m}{m+k} \frac{l!}{(l-m-k)!} (x+1)^{l-m-k} \frac{l!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l+m}{m+k} \frac{l!}{(l-m-k)!} (x+1)^{-m} (x+1)^{l-k} \frac{l!}{k!} (x-1)^{-m} (x-1)^{m+k} \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (x^2-1)^{-m} \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{(l+m)!}{(m+k)!(l-k)!} \frac{l!!}{(l-m-k)!k!} (x+1)^{l-k} (x-1)^{m+k} \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (x^2-1)^{-m} \sum_{k=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{(l-m-k)!k!} \frac{l!}{(l-k)!} (x+1)^{l-k} \frac{l!}{(m+k)!} (x-1)^{m+k} \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (x^2-1)^{-m} \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l-m}{k} D^k(x+1)^l D^{l-m-k}(x-1)^l \\ &= (x^2-1)^{-m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} D^{l-m}(x^2-1)^l \end{aligned}$$

となる。従って

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &= (1-x^2)^{-m/2} \frac{1}{2^l l!} D^{l-m}(x^2-1)^l \\ &= (1-x^2)^{-m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (x^2-1)^m D^{l+m}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \end{aligned}$$

より、(7.10) が示された。

7.3.2 Legendre の陪微分方程式の特解であることの証明 電P 電通電2 量P 量通数食

(7.9) 右辺の P_l 直前の m 階微分に着目する。Legendre の微分方程式 (5.14) に Legendre 多項式 (7.4) を入れた式

$$[D((1-x^2)D) + l(l+1)] P_l = 0$$

を m 回微分すると

$$\begin{aligned} & D^m [(1-x^2)D^2 - 2xD + l(l+1)] P_l \\ &= \left[(1-x^2)D^{m+2} - 2mxD^{m+1} - m(m-1)D^m - 2xD^{m+1} - 2mD^m + l(l+1)D^m \right] P_l \quad (7.11) \\ &= \left[(1-x^2)D^2 - 2(m+1)xD + l(l+1) - m(m+1) \right] D^m P_l = 0. \end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned} D(1-x^2)^{m/2} &= -mx(1-x^2)^{m/2-1} \\ D^2(1-x^2)^{m/2} &= m(m-2)x^2(1-x^2)^{m/2-2} - m(1-x^2)^{m/2-1} \end{aligned}$$

を使うと、(7.9) を Legendre の陪微分方程式 (5.11) に入れたものは

$$\begin{aligned} & \left[(1-x^2)D^2 - 2xD + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] (1-x^2)^{m/2} D^m P_l \\ &= \left[(1-x^2)^{m/2+1} D^2 + 2(1-x^2) \left(D(1-x^2)^{m/2} \right) D + (1-x^2) \left(D^2(1-x^2)^{m/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2x(1-x^2)^{m/2} D - 2x \left(D(1-x^2)^{m/2} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{m/2} \right] D^m P_l \\ &= \left[(1-x^2)^{m/2+1} D^2 - 2mx(1-x^2)^{m/2} D - 2x(1-x^2)^{m/2} D \right. \\ &\quad \left. + m(m-2)x^2(1-x^2)^{m/2-1} - m(1-x^2)^{m/2} + 2mx^2(1-x^2)^{m/2-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{m/2} \right] D^m P_l \\ &= (1-x^2)^{m/2} \left[(1-x^2)D^2 - 2(m+1)xD + \frac{m(m-2)x^2}{1-x^2} - m + \frac{2mx^2}{1-x^2} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right] D^m P_l \\ &= (1-x^2)^{m/2} \left[(1-x^2)D^2 - 2(m+1)xD + \frac{m^2x^2}{1-x^2} + \frac{mx^2}{1-x^2} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} - \frac{m}{1-x^2} \right) \right] D^m P_l \\ &= (1-x^2)^{m/2} \left[(1-x^2)D^2 - 2(m+1)xD + l(l+1) - m(m+1) \right] D^m P_l \\ &= 0. \quad \therefore (7.11) \end{aligned}$$

したがって Legendre 陪多項式 (7.9) は Legendre の陪微分方程式 (5.11) の特解となる。

jump to ... 電 P§8 電通 §8

7.3.3 Legendre 陪多項式の直交性 電2 量P 量通 数 食

§7.2.3 で Legendre 多項式の直交性を得たのと同様に Legendre 陪多項式も $[-1, 1]$ 区間で直交関数系となる。P. 20 の脚注*14 と同じ理由のため、ここでも m は揃えて考察する。導出は、[6] の方法が B 関数を使うものの洗練されているので紹介しよう。*26

$m = 0$ では §7.2.3 にて (7.8) となることを既に示しているの、以下では $m \geq 1$ としよう。 $m < 0$ では (7.10) を使えば $m \geq 0$ とすることができる。また次数 l が異なる場合に直交することは §6.2.2 にて示しているので、ここでは次数が揃っているときの係数に注目する。

唐突だが (7.10) を使うと、

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^1 P_l^{-m}(x) P_l^m(x) dx$$

*26 Legendre 多項式の直交性の証明よりも、B 関数の応用を身につける方が遥かに有用であることは認めざるを得ない。詳細は § 付録 A を参照。

$$= \frac{(-1)^m(l+m)!}{(2^l l!)^2(l-m)!} \int_{-1}^1 D^{l-m}(x^2-1)^l D^{l+m}(x^2-1)^l dx$$

と変形でき、微分回数に差を生じさせることができる。部分積分を繰り返せば、

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 D^{l-m}(x^2-1)^l D^{l+m}(x^2-1)^l dx \\ &= [D^{l-m-1}(x^2-1)^l D^{l+m}(x^2-1)^l]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 D^{l-m-1}(x^2-1)^l D^{l+m+1}(x^2-1)^l dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^{l-m} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l D^{2l}(x^2-1)^l dx \end{aligned}$$

となる。青字の部分で x^2-1 が余ることに注意すれば、境界 $x = \pm 1$ で 0 となることがわかるはずである。右辺赤字の部分は $D^{2l}[x^{2l} + O(x^{2l-1})] = (2l)!$ となるので、元の積分に戻れば

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(2^l l!)^2(l-m)!} (-1)^{l-m} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l D^{2l}(x^2-1)^l dx \\ &= \frac{(l+m)!}{(2^l l!)^2(l-m)!} \int_{-1}^1 (2l)! (-1)^l (x^2-1)^l dx \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(2l)!}{(2^l l!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(2l)!}{(2^l l!)^2} 2^{2l+1} B(l+1, l+1) \quad (\text{A.4}) \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2^{2l+1} (2l)!}{(2^l l!)^2} \frac{(l!)^2}{(2l+1)!} \quad \because \text{\S A.2 性質 3} \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

となる。以上によって、Legendre 陪多項式の直交性

Legendre 陪多項式の直交性

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (7.12)$$

が得られた。

8 極座標斉次 Poisson 方程式一般解 短電P 電通 電2 量P 量通 数 食

とっくの昔に忘れていたことだろうが、我々は Poisson 方程式 (5.1) を解こうとしているのであった。長い道のりだったが、準備がようやく整った。ここまでのまとめとして、Poisson 方程式の一般解を構成しよう。

参考文献は [5] pp.267- である。

jump to ... 短 §8.3

8.1 Poisson 方程式を解く問題の定式化 電P 電通 電2 量P 量通 数 食

さて、我々が取り組むべき問題がどんなものだったのか、ここで再度振り返っておくのは無駄ではないだろう。

[5] pp. 267- にはこの点が非常に細かく書かれているので、要旨を紹介しよう。力学の質点運動などで現れる問題と異なり、Poisson 方程式には時間依存性がない。つまり**本質的に「初期値問題」というものは存在しない**。完全に空間的な問題になっている。この空間に関する問題において、空間分布に制限を与えないまま「一般の調和関数」のような解を求めることは、「一般の解析関数」を求めるのと同じで、あまり意味がない。すなわち **Poisson 方程式を解く問題には本質的に境界条件が付きまとう**。

この境界条件の与え方は主に 2 種類ある。第一に **Dirichlet 問題** と呼ばれるもので、閉曲面上での関数値 $\phi(\mathbf{x})$ による境界条件と内部に与える方程式から解を求めるものである。例えば「半径 a の導体球殻が設置され、中心に電荷が置かれているときの電場分布を求めよ」という問題がこれにあたる。第二に **Neumann 問題** で、閉曲面上での関数の微分 $\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x})$ による境界条件と内部に与える方程式から解を求めるものである。こちらの例は「一様電場中に誘電体球を置いたときの電場分布を求めよ」というのが挙げられる。

8.2 解の一意性 電P 電通 電2 量P 量通 数 食

前章まではとにかく「解を見つけよう」というモチベーション一筋で議論を進めてきた。しかし本来微分方程式を解くにあたっては、解の存在のみならず一意性も考慮しなければならない。仮に一意性が担保されていなければ、計算して得られた解が目の中の物理現象を適切に記述する解とは別物である可能性すら浮かび上がってくる。

本節ではその心配がないことを示していこう。

8.2.1 調和関数の単調性 電P 電通 電2 量P 量通 数 食

一般に Laplace 方程式

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = 0$$

を満たす関数 (調和関数) ϕ は開領域 D で最大・最小値を取らない。厳密な証明は数学書などに任せるとして、ここでは概念的な説明を与える。

もし点 $P \in D$ で ϕ が最大値を取るとすれば、 P の近傍 U で

$$\forall \mathbf{x} \in \partial U, \forall \mathbf{y} \in U, \phi(\mathbf{x}) < \phi(\mathbf{y})$$

なるものが取れる。^{*27} このとき $\frac{\partial\phi}{\partial n} > 0$ が成り立つ。しかし、調和関数 ϕ は Gauss の発散定理を用いると

$$0 = \int_U \Delta\phi d^3x = \int_{\partial U} \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial U} \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

を満たさなければならず、矛盾する。^{*28} 最小値が存在しないことも全く同様に示すことができる。

8.2.2 Laplace 方程式境界値問題の解の一意性の証明 電P 電通電2 量P 量通数食

Poisson 方程式の解の一意性の前に、領域 D に対する Laplace 方程式の境界値問題を考える。

まずは Dirichlet 問題を扱おう。問題の要求は

$$\begin{cases} \Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in D \\ \phi(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial D \end{cases}$$

である。仮に境界条件を満たす2つの解 ϕ_1, ϕ_2 が得られたとする。すなわち

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 0 & \mathbf{x} \in D \\ \phi_1 = \phi_2 = \phi_0 & \mathbf{x} \in \partial D \end{cases}$$

従って

$$\begin{cases} \Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0 & \mathbf{x} \in D \\ \phi_1 - \phi_2 = 0 & \mathbf{x} \in \partial D \end{cases}$$

が満たされる。§8.2.1 でみたように、調和関数は領域 D 内に最大最小値はないので、Laplace 方程式の解 $\phi_1 - \phi_2$ は D 内部で常に0である。ということで、Dirichlet 問題では Laplace 方程式の解は一意に定まる。

Neumann 問題も概して同様の方針で示していく。問題の要求は

$$\begin{cases} \Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in D \\ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\phi_0}{\partial n}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial D \end{cases}$$

である。ここで一般のスカラー関数 u に対し、Gauss の発散定理を用いて

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_D \text{div}(u \text{grad } u) d^3x = \int_D [(\text{grad } u)^2 + u\Delta u] d^3x$$

が恒等的に成り立つが、 $\Delta u = 0$ では

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_D (\text{grad } u)^2 d^3x \quad (8.1)$$

が得られる。Dirichlet 問題の考察同様に ϕ_1, ϕ_2 の2解が得られたとして、

$$\begin{cases} \Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0 & \mathbf{x} \in D \\ \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} = 0 & \mathbf{x} \in \partial D \end{cases}$$

がわかり、第2式を(8.1)に用いると

$$\int_D (\text{grad}(\phi_1 - \phi_2))^2 d^3x = \int_{\partial D} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} dS = 0$$

^{*27} 本節では特に断りのない限り \mathbf{n} は法線方向単位ベクトルを表し、 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は $\|\mathbf{n} \cdot \nabla\phi\|$ を表すものとする。

^{*28} ∂U は一般に U の境界として用いられる記法である。

となるので $\text{grad}(\phi_1 - \phi_2) = 0$ である。よって D 内部で $\phi_1 - \phi_2$ は一定、すなわち ϕ_1 と ϕ_2 の間には常に定数の差しかないことが導かれた。ゆえに 2 つの解は独立でない。

以上によって Laplace 方程式の解の一意性が担保された。Poisson 方程式については非斉次の解と調和関数の和で一般解が表せるので、Poisson 方程式についても解は一意に定まる。Poisson 方程式の解の一意性が示されたので、あとは境界条件に即した解を探索すれば良い。

8.3 Poisson 方程式の一般解探索 短電P 電通電2 量P 量通数食

さて、ようやく Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -f(r)\phi(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

の一般解

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (5.2)$$

を構成しにかかる。この際、一般的に妥当な境界条件として

- $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi$ で不変 (cf. §6.3.1)
- 任意の θ で正則 (cf. §6.3.3)

を与えよう。このとき

$$\begin{cases} m \in \mathbb{Z} & (6.7) \\ \lambda = l(l+1) & (6.11) \\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} & (6.12) \\ l \geq |m| & (6.13) \end{cases}$$

が要求されるのであった。ここでの λ, m といった数は、元来は

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r) = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \equiv \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (5.4)$$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \equiv m^2 \quad (5.5)$$

に現れたものであって、上記 4 条件を満たすときに解は

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_l(x) \quad (7.9)$$

$$\Phi_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi} \quad (5.15)$$

と表されるのだった。ただし、 $P_l^m(x)$ は

$$\begin{aligned} \cos \theta &= x \\ -\sin \theta d\theta &= dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

によって

$$\Theta_l^m(\theta) = P_l^m(\cos \theta) \quad (5.12)$$

を与えるのであった。以上、変数分離で導入した定数を l, m としたときの解は

$$\phi_l^m(r, \theta, \varphi) = R_l(r) P_l^m(\cos \theta) e^{\pm im\varphi} \quad (8.2)$$

となる。

ここで、 l や m といった整数は特解を求めるために勝手に導入したものであり、まして (8.2) が複雑な境界条件を満たすとは思われない。一般的な境界条件に対応するためには、 l, m が取れる値を全て考慮した上で線形和をとり、定数 C_l^{m+}, C_l^{m-} を用いて

一般的な境界条件下での斉次 Poisson 方程式の解

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_l(r) \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^l (\cos^2 \theta - 1)^l (C_l^{m+} e^{im\varphi} + C_l^{m-} e^{-im\varphi}) \quad (8.3)$$

とするのが良いだろう。これによって解に加算無限の自由度が与えられるので、「如何なる境界条件に対しても」とは言えないまでも、現実的に計算可能な系においては (8.3) で太刀打ちできるものと期待される。

jump to ... 短 §11 電 PEnd

9 球面調和関数 電通 電 2 量 P 量角 量通 数 食

前節までは θ に関する解をなす Legendre 陪関数 $P_l^m(\cos \theta)$ と φ に関する解 $\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ を分けて考えてきたが、この二つを合わせて 2 変数関数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ と考えることも少なくない。角変数に関する解の積を θ と φ の 2 変数関数と見做して扱うときに「半径 1 の球面上の積分で規格化されている」すなわち

$$\int d\Omega Y_{l'}^{m'*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (9.1)$$

という規格化条件を課すことにより、調和関数としての性質が現れる。

ということで、規格化条件 (9.1) を適用して球面調和関数の具体形を求めることで、第 II 部の終わりとしよう。

参考文献は [2], [7] pp. 75, [6] pp. 121- である。

jump to ... 電通 §9.1.2 量 P §9.1.2 量角 §9.1.2 量通 §9.1.2

9.1 球面調和関数の具体形 電通 電 2 量 P 量角 量通 数 食

9.1.1 球面調和関数の規格化定数の絶対値 電 2 数 食

前節まで扱ってきた極座標 Poisson 方程式の角変数に関する解 $\Theta_l^m(\theta), \Phi_m(\varphi)$ の規格化を駆使する。

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

として定数 C_l^m を求めていく方針を取る。このとき (9.1) は

$$\int_{r=1} \sin \theta d\theta d\varphi Y_{l'}^{m'*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m C_{l'}^{m'*} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi}$$

となる。^{*29}

まず φ に関する規格化は容易に計算できて、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi} &= \begin{cases} 0 & (m-m' \neq 0) \\ 2\pi & (m-m' = 0) \end{cases} \\ &= 2\pi \delta_{m,m'} \end{aligned}$$

となる。これを使って θ 依存性については、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \delta_{m,m'} &= \int_1^{-1} -dx P_{l'}^{m'}(x) P_l^m(x) \delta_{m,m'} \quad \because (5.9) \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad \because (7.12) \end{aligned}$$

と計算できる。

従って (9.1) は、

$$|C_l^m|^2 \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

^{*29} Legendre 多項式 P_l^m は実関数だが、定数 $C_l^m, C_{l'}^{m'}$ 及び φ に関する関数 $\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ は一般に複素数値関数であることに注意。

となるので、位相の不定性はあれど、

$$|C_l^m| = \sqrt{\frac{(l-m)! 2l+1}{(l+m)! 4\pi}} \quad (9.2)$$

がわかる。

9.1.2 球面調和関数の位相 電通 電2 量P 量角 量通 数 食

以上の議論によって、球面調和関数は

球面調和関数 (1)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-m)! 2l+1}{(l+m)! 4\pi}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (9.3)$$

とすればいいことがわかるだろう。実際、電磁気学をはじめとして古典論では (9.3) を球面調和関数の定義とすることが多い。

しかし、特に量子力学においては第 III 部で取り上げる角運動量の議論のために、位相の取り方を若干変更して

球面調和関数 (2)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(l-m)! 2l+1}{(l+m)! 4\pi}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (9.4)$$

とする流儀がある。この際 (7.10) を考慮すると、 $m < 0$ では

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta, \varphi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{(l-m)! 2l+1}{(l+m)! 4\pi}} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)! 2l+1}{(l-m)! 4\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{(l-|m|)! 2l+1}{(l+|m|)! 4\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{aligned}$$

と、露わな負号が消えることに注意されたい。詳しくは §10.2 にて紹介するが、「 $m = l$ から下降演算子によって順次 m の値を下げる」という関数の構成方法のために、 m ごとに正負が変わる。

(9.3), (9.4) いずれの場合でも (9.2) を満たすことは一目瞭然だろう。

jump to ... 電通 §11 量P End 数 §11

第 III 部

固有方程式のための Legendre

10 軌道角運動量の固有関数 量角 量通 食

量子力学で扱う軌道角運動量

$$\hat{h}l = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (10.1)$$

は、古典論ではおよそ粒子の公転運動の角運動量に相当する。特にスピンのない1粒子極座標系では Legendre 多項式を含む球面調和関数を使うことで固有状態の波動関数を表すことができる。

本節では角運動量の交換関係から導かれる昇降演算子などの性質は既知のものとして議論を進める。

参考文献は [2] pp. 248-, [4] pp. 122- である。

10.1 極座標における軌道角運動量にまつわる演算子 量角 量通 食

10.1.1 極座標における微分演算子 ∇ の導出 量角 量通 食

(10.1) より、座標表示で軌道角運動量の演算子は

$$\hat{l} = \frac{1}{\hbar} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\mathbf{r} \times \nabla \quad (10.2)$$

となる。極座標でこれを記述するには微分演算子 ∇ を $\partial/\partial r, \partial/\partial \theta, \partial/\partial \varphi$ で表さなければならない。本節の読者にとっては復習だと思われるが、決して暗記するものではないので、ここで再度導いておくのも無駄ではないだろう。

いつもの通りの極座標をとり

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

とする。これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \varphi, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

で、Leibnitz rule によって

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \\ \partial/\partial \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

になる。逆行列を計算すると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r^2(\sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^3 \theta \cos^2 \varphi)} \\ & \times \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi & r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi & r^2 \sin \theta \cos \theta \\ r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & -r \sin^2 \theta \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & r \cos \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta & -r \sin^2 \theta & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \\ \partial/\partial \varphi \end{pmatrix}$$

が得られる。

10.1.2 極座標での軌道角運動量の昇降演算子 量角 量通 食

角運動量の計算には昇降演算子がつきものなので、そのために角運動量の各成分を極座標で求める。(10.2)を成分表示すれば

$$\begin{aligned} \hat{l}_x &= -iy \frac{\partial}{\partial z} + iz \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -i \left[(r \sin \theta \sin \varphi \cdot \cos \theta - r \cos \theta \cdot \sin \theta \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left(r \sin \theta \sin \varphi \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) - r \cos \theta \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= -i \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{l}_y &= -iz \frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -i \left[(r \cos \theta \cdot \sin \theta \cos \varphi - r \sin \theta \cos \varphi \cdot \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left(r \cos \theta \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= -i \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{l}_z &= -ix \frac{\partial}{\partial y} + iy \frac{\partial}{\partial x} \\ &= -i \left[(r \sin \theta \cos \varphi \cdot \sin \theta \sin \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \cdot \sin \theta \cos \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left(r \sin \theta \cos \varphi \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} - r \sin \theta \sin \varphi \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \left(r \sin \theta \cos \varphi \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} + r \sin \theta \sin \varphi \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

である。これより昇降演算子を求めれば、

$$\begin{aligned}\hat{l}_+ &= \hat{l}_x + i\hat{l}_y \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \\ \hat{l}_- &= \hat{l}_x - i\hat{l}_y \\ &= (\cos\varphi - i\sin\varphi) \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)\end{aligned}$$

が得られる。以上によって座標表示における主要な演算子

$$\hat{l}_z = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (10.3)$$

$$\hat{l}_+ = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (10.4)$$

$$\hat{l}_- = e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (10.5)$$

が揃った。

10.2 軌道角運動量の固有波動関数の具体形 量角 量通 食

ここまでで演算子の具体系が得られたので、固有状態に作用させることで固有状態が満たすべき方程式が得られることが期待できる。一般論を扱う際は固有状態を $|l, m\rangle$ や $\langle x|l, m\rangle$ などと表すが、ここでは $\langle x|l, m\rangle = Y_l^m(\mathbf{x})$ と書いておこう。演算子からの作用を受けると (4.5) のようになるはずである。

10.2.1 \hat{l}_z の固有値が最大の固有状態 量角 量通 食

(4.5) を満たす関数 $Y_l^m(r, \theta, \varphi)$ を一足飛びで求めるのは難しいので、まずは Y_l^l を考えよう。(10.3) を考慮し \hat{l}_z をかけた時の振る舞いを考えると、

$$\hat{l}_z Y_l^l = -i \frac{\partial Y_l^l}{\partial\varphi} = l Y_l^l.$$

よって $\varphi = 0$ での値を $R(r)\Theta_l^l(\theta)$ とすれば、 φ については簡単に解けて、

$$Y_l^l(\mathbf{x}) = R(r)\Theta_l^l(r, \theta)e^{il\varphi} \quad (10.6)$$

となる。ここで軌道角運動量については $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ で値が変わらないとするのが妥当だろう。よって

$$l \in \mathbb{Z} \quad (10.7)$$

が要求される。

今度は Y_l^l に上昇演算子 (10.4) をかける。

$$\hat{l}_+ Y_l^l = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) Y_l^l = 0.$$

(10.6) を使って整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial\theta} R(r)\Theta_l^l(\theta)e^{il\varphi} = l \cot\theta R(r)\Theta_l^l(\theta)e^{il\varphi}$$

である。Θに関する微分方程式が得られ、変数分離型の微分方程式の解法によって

$$\int \frac{d\Theta_l^l}{\Theta_l^l} = \int l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

となるので、積分定数を $R(r)$ に課すことで

$$\Theta_l^l(\theta) = \sin^l \theta$$

と表せる。

$R(r)$ が残ったが、(10.3),(10.4),(10.5) のいずれにも r は登場しない。ゆえに角運動量の議論において r 依存性は無視できる。そこで以下では $r = 1$ 上で考え、 $R(1) = N_l$ とする。つまり、

$$Y_l^l(r = 1, \theta, \varphi) = N_l \sin^l \theta e^{il\varphi} \quad (10.8)$$

である。

10.2.2 一般の固有状態 量角 量通 食

$m = l$ での形はわかったので、一般の $m = -l, -l+1, \dots, l$ について関数形を求めよう。

Y_l^l に下降演算子を順次かけて Y_l^m を構成する。 Y_l^m に下降演算子がかかれば

$$\begin{aligned} \hat{l}_- Y_l^m &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_l^{m-1} \\ &= \sqrt{(l-m+1)(l+m)} Y_l^{m-1} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} (\hat{l}_-)^{l-m} Y_l^l &= \sqrt{2l \cdot 2(2l-1) \cdots (l-m)(l+m+1)} Y_l^m \\ &= \sqrt{1 \cdot 2 \cdots (l-m) \cdot 2l(2l-1) \cdots (l+m+1)} Y_l^m \\ &= \sqrt{(l-m)! \frac{(2l)!}{(l+m)!}} Y_l^m. \end{aligned}$$

ゆえに(10.5)を考慮して

$$Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (\hat{l}_-)^{l-m} Y_l^l = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left[e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]^{l-m} Y_l^l \quad (10.9)$$

である。

ここで天下一的だが、

$$\begin{aligned} \hat{l}_-(e^{im\varphi} f(\theta)) &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (e^{im\varphi} f(\theta)) \\ &= -e^{-i\varphi} e^{im\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) - e^{-i\varphi} e^{im\varphi} m \cot \theta f(\theta) \\ &= -e^{i(m-1)\varphi} \frac{1}{\sin^m \theta} \sin^m \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) - e^{i(m-1)\varphi} m \frac{1}{\sin^m \theta} \sin^{m-1} \theta \cos \theta f(\theta) \\ &= -e^{i(m-1)\varphi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^m \theta f(\theta)) \end{aligned}$$

を使う。^{*30} (10.9) に(10.8)を代入して

$$Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (\hat{l}_-)^{l-m} (N_l \sin^l \theta e^{il\varphi})$$

^{*30} この計算は、ゆくゆくは Y_l^m が球面調和関数になり、その中に $\sin^{-m} \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{-m/2}$ が現れるのを期待してのものである。

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l (\hat{l}_-)^{l-m-1} \left(-e^{i(l-1)\varphi} \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^l \theta \sin^l \theta \right) \\
&= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l (\hat{l}_-)^{l-m-2} \left(e^{i(l-2)\varphi} \frac{1}{\sin^{l-1} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{2l} \theta \right) \\
&= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l (\hat{l}_-)^{l-m-3} \left(-e^{i(l-3)\varphi} \frac{1}{\sin^{l-2} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{2l} \theta \right) \\
&= \dots \\
&= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l (-1)^{l-m} e^{im\varphi} \frac{1}{\sin^{m+1} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{l-m-1} \sin^{2l} \theta \\
&= (-1)^{l-m} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l e^{im\varphi} \frac{1}{\sin^m \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{l-m} \sin^{2l} \theta
\end{aligned}$$

と計算される。

(5.9) と同様に $x = \cos \theta$, $d/dx = -1/\sin \theta \partial/\partial \theta$ とすれば、

$$\begin{aligned}
Y_l^m &= (-1)^{l-m} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l e^{im\varphi} \frac{1}{(1-x^2)^{m/2}} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{l-m} (1-x^2)^l \\
&= (-1)^l \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l e^{im\varphi} \frac{1}{(1-x^2)^{m/2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l-m} (x^2-1)^l
\end{aligned}$$

となって、 θ に関わる部分には Legendre 陪多項式 (7.9)

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2-1)^l$$

の $m \rightarrow -m$ に近い形が得られる。実際に、

$$P_l^{-m}(x) = \frac{1}{2^l l! (1-x^2)^{m/2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l-m} (x^2-1)^l$$

である。角運動量の量子数の要件として l が整数または半整数に限られること、 $m = -l, -l+1, \dots, l$ が要求されること、さらに (10.7) を考慮すると P_l^m の記法は問題なく、 Y_l^m を Legendre 陪多項式で表せば

$$Y_l^m = (-1)^l \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l e^{im\varphi} \cdot 2^l l! P_l^{-m}(\cos \theta) \quad (10.10)$$

となる。^{*31} これに (7.10)

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m$$

を用いると

$$\begin{aligned}
Y_l^m(\theta, \varphi) &= (-1)^l 2^l l! \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} N_l e^{im\varphi} (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) \\
&= (-1)^{l+m} 2^l l! \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}} N_l e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta)
\end{aligned} \quad (10.11)$$

である。

^{*31} 一般に角運動量の次数 l, m は半整数でも構わないが、Legendre 陪多項式の次数は $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に限られる。

10.2.3 固有状態の規格化 量角 量通 食

ここまでの計算では規格化定数 N_l を残したまま計算してきたが、(10.11) を見る限り、負号を付した球面調和関数 (9.4) に形が似ている。そこで本節では球面調和関数の規格化条件 (9.1) を Y_l^l に要求することで N_l を決定し、固有状態の波動関数を決定する。

まずは Y_l^l を規格化しよう。(10.8) を規格化条件に適用すると、

$$\begin{aligned}
\delta_{l,l'} &= \int d\Omega (Y_l^{m'})^* Y_l^m \\
&= \int_{r=1} \sin\theta d\theta d\varphi N_l^* \sin^{l'}\theta e^{-il'\varphi} N_l \sin^l\theta e^{il\varphi} \\
&= N_l^* N_l \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^{l'}\theta \sin^l\theta e^{i(l-l')\varphi} d\varphi \\
&= 2\pi \delta_{l,l'} N_l^* N_l \int_0^\pi \sin^{2l+1}\theta d\theta \\
&= 2\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1}\theta d\theta \\
&= 2\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} B\left(l+1, \frac{1}{2}\right) \quad \because \text{\S A.2 性質 2} \\
&= 2\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(l+3/2)} \quad \because \text{\S A.2 性質 3} \\
&= 2\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} \frac{l!\sqrt{\pi}}{(l+1/2)(l-1/2)\cdots 1/2\sqrt{\pi}} \quad \because \text{\S A.1 性質 1, 2, 3} \\
&= 2\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} \frac{2^{l+1}l!}{(2l+1)(2l-1)\cdots 3\cdot 1} \\
&= 2\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} \frac{2^{l+1}l!2^l l!}{(2l+1)\cdot 2l\cdot(2l-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= 4\pi |N_l|^2 \delta_{l,l'} \frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!}
\end{aligned}$$

となる。従って位相の不定性はあれど

$$|N_l| = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

がわかる。

これに基づき (10.8) は位相を除いて

$$|Y_l^l(\theta, \varphi)| = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \sin^l\theta e^{il\varphi}$$

となる。(10.11) は

$$|Y_l^m(\theta, \varphi)| = \left| (-1)^{l+m} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \right|$$

になる。右辺 $(-1)^l$ の部分は m に依存しない位相なので、1 としておくのが望ましい。ということで位相を

$$N_l = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

としておけば、

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{il\varphi} \quad (10.12)$$

となる。§9.1.2 でみた 2 種類の位相のうち、(9.4) に一致していることに注意されたい。

jump to ...	量角 End	量通 End
-------------	--------	--------

第 IV 部

多項式展開のための Legendre

11 Legendre 多項式の母関数 短 電多 電通 電 2 数 食

今回考えるのは §4.5 で見た多重極展開における Legendre 多項式の使い方である。

参考文献は [7] pp. 52-, [4] pp. 107-, [6] pp. 45- である。

11.1 Legendre 多項式の母関数による定義 短 電多 電通 電 2 数 食

本パートでは Legendre 多項式 $P_n(x)$ を以下のように再定義する。

Legendre 多項式の母関数

$$g(t, x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (|t| < 1) \quad (11.1)$$

この形式で書かれた $g(t, x)$ を **Legendre 多項式の母関数** と呼ぶ。

jump to ... 短 End

11.1.1 Legendre 多項式の級数表示 電多 電通 電 2 数 食

結論から言えば

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^{nr} (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r} \quad (11.2)$$

である。ただし $[n/2]$ は Gauss 記号と呼ばれ、 $n/2$ を超えない最大整数と定義される。

導出は (11.1) を t, x で Taylor 展開して t^n の係数を比較すれば可能である。その際、 $y := 2tx - t^2$ とすると見通しが良いだろう。

$$\begin{aligned} g(t, x) &= (1-y)^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{y^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{y^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p-1)!!}{2^p} \frac{y^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} y^p. \end{aligned}$$

この $y^p = (2tx - t^2)^p$ を 2 項展開すると

$$\begin{aligned} y^p &= t^p (2x - t)^p \\ &= t^p \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} (2x)^{p-r} (-t)^r \end{aligned}$$

となるので、

$$g(t, x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^p \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} t^p \frac{p!}{(p-r)! r!} (2x)^{p-r} (-t)^r.$$

t^n の展開係数を見るために $p+r=n$ となる p, r を取り出せば、

$$g(t, x) = \sum_r \frac{(2n-2r)! (-1)^r x^{n-2r}}{2^n (n-r)! r! (n-2r)!} t^n$$

となる。 $0 \leq r \leq p = n - r$ より $0 \leq r \leq [n/2]$ であるから、(11.2) が得られる。

11.1.2 Rodrigues の公式と母関数 電多 電通 電2 数 食

数々の直交関数で威力を発揮する Rodrigues の公式というものがある。そのシステムティックな使い方は主に §7 で解説しているののでそちらに回すとして、ここでは Legendre 多項式の表示を提示し、§11.2 の議論につなげよう。

Rodrigues の公式によって n 次の Legendre 多項式は

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (11.3)$$

と表せる。この表式が (11.2) に一致することを確かめよう。 $(x^2 - 1)^n$ を 2 項展開すると、

$$\frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} D^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} (-1)^r \quad (11.4)$$

となる。

$$D^n x^{2n-2r} = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r}$$

であるから、(11.4) の右辺が $r > n/2$ で 0 となることに注意して、

$$\frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r n! (2n-2r)!}{2^n n! (n-r)! r! (n-2r)!} x^{n-2r}$$

となり、(11.2) に一致する。

Rodrigues の公式による Legendre 多項式の表示 (11.3) は定義式の Taylor 展開係数 (11.2) と等価であることが示されたので、(11.2) の代わりに (11.3) を (11.1) の展開係数として以下の議論を進める。

jump to ... 電多 End 電通 End

11.2 母関数表示の妥当性 電2 数 食

さて、(11.1) で Legendre 多項式を定義してから無批判に無限級数を使ってきたが、無限級数が収束する保証はない。つまり (11.1) が well-defined であること (定義となっていること) も非自明である。しかし一般に複素数で考えてどの領域で well-defined となるか (級数が収束するか) を考えるのも手間なので、手っ取り早く実用上必要な領域について考えよう。

jump to ... 数 §11.2.2

11.2.1 収束範囲の選択 電2 食

さて、§4.5 で見たような状況では

$$\phi(x) = \int_V d^3 x' \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\rho(x')}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \theta}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon x} \int_V d^3 x' \frac{\rho(x')}{\sqrt{1 + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 - 2\frac{x'}{x} \cos \theta}} \quad (4.6)$$

の右辺分母を x'/x の級数として

$$\phi(x) = \frac{1}{x} \sum_n \int_V d^3 x' \rho(x') a_n(\cos \theta) \left(\frac{x'}{x}\right)^n \quad (4.7)$$

の形に展開したいのだった。 x' は小領域 V 内部の点から原点までの距離であり、 x は観測点から原点までの距離である。多重極展開の文脈では「電荷分布を遠くの観測点から見たときに、電荷分布を点電荷や電気双極子などに近似できる」ということを示したいので、 $x' \ll x$ とする。とはいえ、どれほどのオーダー差をもって $x' \ll x$ とするかは注目したい現象によりけりなので、とりあえずここでは $x' < x$ としておくのが良いだろう。

(4.6) を考慮すれば、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ と合わせて考えると、(11.1) でいうところの $|x| \leq 1, |t| < 1$ で級数が収束すれば実用上困ることはないだろう。

11.2.2 複素積分を用いた Legendre 多項式の導出 電 2 数 食

Rodrigues の公式を使うと複素積分によって Legendre 多項式の母関数が (11.1) の左辺になることが示せる。その過程で §11.2.1 で議論した「 $|x| \leq 1, |t| < 1$ で級数が収束すること」を示す。複素積分を使う方法では大まかな方針は同じだが、ここでは絶対収束などの細かい部分にまでこだわりを見せる [6] の方法を紹介しよう。

ここで使うのが Goursat の定理

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

である。^{*32} ^{*33} この公式の条件は f が閉曲線 C で囲まれる領域 D 内で正則であることだった。 $(z^2 - 1)^n$ は全平面で正則なので、Rodrigues の公式で表された Legendre 多項式 (11.3) に適用すると、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n (z-x)^{n+1}} dz \quad (11.5)$$

となる。^{*34} $-1 \leq x \leq 1$ を扱いたいので、図 3 に示すような単位円及び ± 1 の周りでの微小半径 $\varepsilon \ll 1$ の円弧形迂回路を C として取る。^{*35}

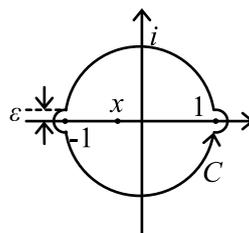


図 3 (11.5) の積分路 C

^{*32} Cauchy の積分公式に微分を重ねること得られる。

^{*33} Goursat の定理を使って母関数を求める方法は Legendre 多項式に限らず Rodrigues の公式を満たす直交関数で多用される手法である。

^{*34} Schläfli の積分表示と呼ばれる。

^{*35} 被積分関数に $(z-x)^n$ の形状が現れるとき x を中心とする円形の積分路を取るのが定石であるが、今回は $-1 \leq x \leq 1$ で動くので単位円を取った。

母関数展開 (11.1) の形に持ち込むために、(11.5) の無限級数を取る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}} t^n dz \quad (11.6)$$

ここである程度の方針を立てておこう。母関数

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \quad (11.7)$$

は無限級数の形をしていないので、何かしらの形で級数を計算しなければならない。無限級数の計算結果がダイレクトに (11.7) の形になることは考えにくい。おそらく計算過程で積分と無限級数の順序が入れ替わっていて、級数を計算して得られる関数を積分すると (11.7) が得られるのだろう。無限級数と積分の順序交換は、被積分関数が領域内で一様収束するときに限り可能なのであった。被積分関数を眺めてみると

$$\frac{t^n(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}} = \frac{1}{z-x} \left(\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)} \right)^n \quad (11.8)$$

となっているので、

$$\left| \frac{t(z^2-1)}{2(z-x)} \right|^n < 1 \quad (11.9)$$

となれば間違いなく一様収束する。さらにこの場合、積分と級数の順序交換をした後の無限級数が 1 より小さい数の n 乗の和になっているので、級数は容易に計算可能である。ということで、以下では (11.9) を示していく。

まずは分子を上から押さえる。 z が単位円上にあるとき、図 4 に示すように、 $z, \pm 1$ の 3 点を頂点とする三角形は z の角で直角となる。 $|z^2-1| = |z-1||z+1|$ というのは、この直角三角形の面積の 2 倍になっている。一方で直角三角形の面積は実軸を底辺としたときに $|\operatorname{Im} z|$ と表せる。(11.9) 分母の $z-x$ と打ち消しあってくれれば助かるので

$$|z^2-1| = 2|\operatorname{Im} z| \leq 2|z-x|$$

と押さえる。 $|t| < 1$ と合わせると、 z が単位円上にある間は

$$\left| \frac{t(z^2-1)}{2(z-x)} \right| \leq |t| < 1$$

である。

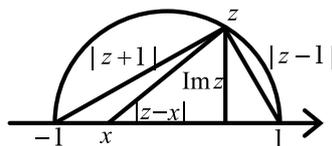


図 4 z が単位円上にあるときの $z, \pm 1$ を頂点とする三角形

問題は z が ± 1 周りの微小円上にあるときである。先に 1 周りの円弧上を考えよう。一般に $-1 \leq x \leq 1$ で $|z-1| \leq |z-x|$ であるから、

$$\left| \frac{t(z^2-1)}{2(z-x)} \right| \leq \frac{|t(z^2-1)|}{|2(z-1)|} = \left| \frac{t(z+1)}{2} \right|$$

が成り立つ。 $z = 1 + \varepsilon e^{i\theta}$ のように表されるので、 $|z+1| \leq |2+\varepsilon|$ である。ゆえに

$$\left| \frac{t(z^2-1)}{2(z-x)} \right| \leq \left| \frac{t(z+1)}{2} \right| \leq \left| \frac{t(2+\varepsilon)}{2} \right|.$$

$|t| < 1$ としているので、右辺の値が 1 を下回るような $\varepsilon > 0$ は存在する。 -1 周りも全く同様。

以上によって、 $\forall z \in C$ で (11.9) が成り立つことがわかった。先ほど考察した通り (11.8) が $|t| < 1, |x| \leq 1$ で一様収束するので、(11.6) の級数と積分の順序交換ができて

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}} t^n dz$$

である。(11.8) の級数を計算すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2-1}{2(z-x)} t \right)^n dz &= \frac{1}{z-x} \frac{1}{1 - \frac{z^2-1}{2(z-x)} t} \\ &= \frac{1}{-\frac{t}{2}z^2 + z - x + \frac{t}{2}} \\ &= -\frac{2}{t} \frac{1}{(z-z_+(x))(z-z_-(x))} \end{aligned}$$

となる。ただし $z_{\pm}(x)$ は

$$z^2 - \frac{2}{t}z - 1 + \frac{2}{t}x = 0$$

の解で、具体的に計算すると

$$z_{\pm}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+t^2-2tx}}{t}$$

である。特に、 C 内部にあるのは $z_-(x)$ に限られる。よって留数定理から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C -\frac{2}{t} \frac{1}{(z-z_+(x))(z-z_-(x))} dz &= -\frac{2}{t} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \frac{1}{z_-(x) - z_+(x)} \\ &= -\frac{2}{t} \frac{t}{-2\sqrt{1+t^2-2tx}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} \end{aligned}$$

となって、母関数 (11.7) が導出された。

付録 A Γ 関数と B 関数

A.1 Γ 関数

一般に Γ 関数は

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\operatorname{Re} x > 0) \quad (\text{A.1})$$

で定義される。

特筆すべき性質として、以下がある。

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(n) = (n-1)!$

性質 1 は部分積分によって示せる。実際、

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} x t^{x-1} dt \\ &= x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

である。

性質 2 は Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いる。^{*36} $t = s^2$ の変数変換によって

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s^2} \frac{2s ds}{s} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

が得られる。

性質 3 は

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

及び性質 1 から

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

^{*36} Gauss 積分の証明は $x^2 \rightarrow r^2$ と置き換えた上で r を極座標の動径とみなし $r^2 = x^2 + y^2$ の変数変換をするのが一般的である。

$$\begin{aligned}
&= \dots \\
&= (n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \Gamma(1) \\
&= (n-1)!
\end{aligned}$$

と示せる。

特に性質 3 ゆえに Γ 関数は階乗の一般化と捉えられる。

A.2 B 関数

B 関数 (ベータ関数) は

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{A.2})$$

によって定義される。

特筆すべき性質として以下がある。

1. $B(x, y) = B(y, x)$
2. $B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$
3. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

性質 1 は定義式 (A.2) にて $t \rightarrow 1-t$ の変数変換を行えば直ちに得られる。性質 2 は $t = \sin^2 \theta$ と変数変換すれば良い。性質 3 の証明は上記 2 つと比べて比較的難しい。まず変数変換 $t \rightarrow x^2$ によって Γ 関数は

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty 2e^{-x^2} x^{2p-1} dx$$

となる。よって

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty 4e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy$$

である。これを 2 次元極座標 (r, θ) へ変数変換して

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty r dr \int_0^{\pi/2} d\theta 4e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \sin \theta)^{2q-1} \\
&= \int_0^\infty 2e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \int_0^{\pi/2} 2 \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta \\
&= \Gamma(x+y)B(x, y) \quad \because (\text{性質 2})
\end{aligned}$$

である。特にこの性質 3 によって、 Γ 関数の加法定理

$$\Gamma(x+y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{B(x, y)} \quad (\text{A.3})$$

が得られる。

A.3 積分への応用

B 関数や Γ 関数は積分において強い力を発揮する。いくつか応用例をあげておこう。

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1) \quad (\text{A.4})$$

左辺を

$$t = \frac{x-a}{b-a}$$

と変数変換することによって

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = \int_0^1 (b-a)^{m+n+1} t^m (1-t)^n dt = (b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1)$$

となり、右辺が得られる。

参考文献

- [1] 砂川重信 (1999) 「理論電磁気学 第3版」紀伊國屋書店
- [2] 猪木・川合 (1994) 「量子力学 I」講談社
- [3] 半揚稔雄 (2018) 「つかえる特殊関数入門」日本評論社
- [4] 柴田尚和・是常隆 (2021) 「物理数学 量子力学のためのフーリエ解析・特殊関数」共立出版
- [5] 佐々木隆 (1996) 「物理学基礎シリーズ 11 物理数学」培風館
- [6] 時弘哲治 (2006) 「工学における特殊関数」共立出版
- [7] 金子尚武・松本道男 (1984) 「現代数学レクチャーズ C-3 特殊関数」培風館
- [8] 小野寺嘉考 (2007) 「物理のための応用数学 第19版」裳華房
- [9] Chun Wa Wong 小林・近 訳 (1996) 「物理数学入門 II 微分方程式と複素関数」丸善
- [10] R. Courant, D. Hilbert 藤田・高見・石村 訳 (2013) 「数理物理学の方法 上」丸善出版
- [11] Ahlfors 笠原乾吉訳 (1982) 「複素解析」現代数学社