Maxwellの応力を読み解くにあたっての2階テンソルに関する数学的諸問題

低音

2022年1月20日

本pdfは拙作同名のnoteの記事[*1]と同一内容である。
誤植・記事との相違等があれば是非ご指摘願いたい[*2]。

目次

[*1] 「マクスウェルの応力を読み解くにあたっての2階テンソルに関する数学的諸問題」https://note.com/teion_burns/n/n07a00725ec60

[*2] ご指摘は*1のリンク先のコメント機能から投稿していただけるとありがたい。またTwitterも行っている。https://twitter.com/teion_burns

1　本記事の意義

ここでは、Maxwell 方程式と Lorentz 力による運動方程式を出発点として、Maxwell の応力を定義し、点電荷系での運動量保存を導出する。以下の説明で、特に §3 は砂川 [1] に全面的に依拠している。しかし同書では

- 2 階テンソルの発散の定義 (4.4)
- 2 階テンソルにおける Gauss の発散法則の正当性 (5.2)

についての記述が抜けているため、それぞれ補った。また、

- Maxwell の応力テンソルの定義の動機 (4.1)
- 2 階テンソルの行列による扱い (4.2, 4.3)

についても解説を加えている。議論の流れを掴む上で有効となるだろう。*3

すでに砂川などで計算を追っている場合は、§3.3 から読み進めても良い。ただし、それ以前の数式を度々参照することに注意されたい。

2　必要な知識

この解説では

- 基本的なベクトル解析の演算・公式
- Gauss の発散定理
- 行列積

の知識を前提とする*4。また、

- Kronecker の δ
- Dirac の δ 関数
- Maxwell 方程式
- 直交行列による基底の変換

の具体的な知識があると、理解の助けとなるだろう。

3　点電荷系運動量保存までの道のり

以下、前述の通り砂川 [1] に全面的に依拠している。

---

*3 この通り、本解説は拙作 note のマガジン【行間を読む】(`https://note.com/teion_burns/m/m9f7c1970cbe0`) の砂川「理論電磁気学 第 3 版」pp.55- (第 2 章 §5) として読めるように構成している。

*4 余談だが、特に基本的なベクトル解析の公式について、ペンローズのグラフ記法の習得を強く推奨する。本解説の内容に対しては過剰であるが、電磁気学をはじめ多方面で使うベクトル解析の公式はほぼ暗算できる。詳しくは拙作「ペンローズのグラフ記法によるベクトル解析の公式の表現」`https://note.com/teion_burns/n/n5f486f83dd81` を参照。

3.1　基礎方程式

使う方程式は

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t) = e_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i(t),t) + e_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_i(t),t) \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t) - \frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \sum_i e_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i(t)) \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) = \sum_i e_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i(t)) \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{5}$$

の 5 本である。(1) は Lorentz 力による点電荷の運動方程式、(2) は Faraday の法則、(3) は電荷に対する Ampère-Maxwell の法則、(4) は電荷が作る電場に関する Gauss の発散定理、(5) は磁気単極子の不在を表す。特に下 4 式は Maxwell 方程式を成す。

3.2　運動方程式の総和

力学において運動量保存ないし運動量変化を議論する際には、点電荷系か否かを問わず、**まずは運動方程式を全て足し合わせるのが定石**である。ここでも定石に従って運動方程式 (1) を総和。

$$\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i(t)}{dt} = \sum_i\int d^3x\, e_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{B})$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i = \int d^3x\left[\sum_i e_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{E} + \sum_i e_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{B}\right]$$

左辺は点電荷運動量 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m}}(t) := \sum_i m_i\boldsymbol{v}_i(t)$ の時間全微分なので、右辺が力の形になってくれると嬉しい。右辺第 1 項を電場に関する Gauss の法則 (4) で、第 2 項を Ampère-Maxwell の法則 (3) で変形して

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_m = \int d^3x\left[(\mathrm{div}\ \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + \left(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B}\right] \tag{6}$$

となる。この右辺を展開し、特に真空中では

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B} - D\times\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \because (2)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\mu_0\boldsymbol{H})\\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\end{aligned}$$

の関係が得られるので、(6) 式は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_m = \int d^3x\left[(\mathrm{div}\ \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{D}\times\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\right]$$

と変形可能である。右辺最終項を左辺に移して、残りの項の順番を入れ替えれば、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_m + \frac{d}{dt}\int d^3x\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right) = \int d^3x\left[(\mathrm{div}\,\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}\right]$$

となる。Poynting ベクトル $\boldsymbol{S} := \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ を定義して、最終項の外積順序を交換すれば、当座の目標

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_m + \frac{1}{c^2}\int d^3x\,\boldsymbol{S}\right) = \int d^3x\left[(\mathrm{div}\,\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\right] \tag{7}$$

が得られる。

ここで、見通しをよくするために、天下り的だが式変形を続行し、そこで浮上した問題点を解決する形を取ろう。右辺第 1 項と第 2 項は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^e$ と、第 3 項は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^m$ と書けば、

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_m + \frac{1}{c^2}\int d^3x\,\boldsymbol{S}\right) = \int d^3x(\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^e + \mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^m) \tag{8}$$

となる。なお、$\boldsymbol{T}^e, \boldsymbol{T}^m$ は主に行列で表現が可能な 2 階テンソルである。左辺第 2 項（微分の中）を $\boldsymbol{G_f}(t)$ と定義した上で、$\boldsymbol{T} := \boldsymbol{T}^e + \boldsymbol{T}^m$ に、2 階テンソルでの Gauss の発散定理を用いることで、

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_m(t) + \boldsymbol{G}_f(t)\right) = \int \boldsymbol{n}dS\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t) \tag{9}$$

となり、左辺が電磁場全体で見た運動量変化、右辺が電磁場全体にかかる力を表す。

3.3 ここまでで未解決の問題点

最後に示した式変形 (8),(9) で、特に $\boldsymbol{T}$ が行列で表される「テンソル」であることを考慮すると、以下の問題が残る。

- $\boldsymbol{T}^e, \boldsymbol{T}^m$ とは何者か
- $\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^e$ などはどのように定義されるのか
- 2 階テンソル $\boldsymbol{T}$ についても Gauss の発散定理が成り立つのか

これらの問題を次節から解決していく。

4 応力テンソルに関する諸定義

4.1 応力テンソルの定義の動機

古典粒子系において下式のようになる式は、左辺が運動量の時間変化を、右辺が系全体にかかる力（勿体ぶって言えば力積の時間変化）を表す。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$$

(9) 式でも同様に、**全運動量の時間変化が系全体にかかる力に等しい**と解釈してみよう。以下では簡単のため時間変化のない静電場で考察する。所詮はこの後テンソルをどのように定義するかを探っているだけなので、現時点で時間変化を厳密に議論する必要はない。

体積 V にかかる力は

- 自己力（V 内の電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}_{self}$ に由来）

- 外力（V 外の電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}_{out}$ に由来）

の 2 種類。特に静電場では自己場が $\mathbf{0}$ で [2] あるから $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{self}+\boldsymbol{E}_{out}=\boldsymbol{E}_{out}$ にて

$$\boldsymbol{F}=\int_V \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})d^3x=\int_V (\varepsilon_0 \operatorname{div}\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}\, d^3x$$

を得る。Levi-Civita 記号によって $\epsilon_{ijk}=1$ となるように、つまり ijk がこの順に xyz とサイクリックになるように添字をとって、その i 成分に着目すると、次のように表される。

$$\begin{aligned}
F_i &= \varepsilon_0 \int \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i}+\frac{\partial E_j}{\partial x_j}+\frac{\partial E_k}{\partial x_k}\right) E_i\, d^3x \\
&= \varepsilon_0 \int \left[E_i\frac{\partial E_i}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial E_iE_j}{\partial x_j}-E_j\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)+\left(\frac{\partial E_iE_k}{\partial x_k}-E_k\frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right)\right] d^3x
\end{aligned}$$

ここで、今は時間変化のない静電場を考えていて、Faraday の法則 (2) から

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathbf{0} \qquad \therefore \frac{\partial E_i}{\partial x_j}=\frac{\partial E_j}{\partial x_i},\quad \frac{\partial E_i}{\partial x_k}=\frac{\partial E_k}{\partial x_i}$$

が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned}
F_i &= \varepsilon_0 \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}E_i^2-\frac{1}{2}E_j^2-\frac{1}{2}E_k^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}(E_iE_j)+\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iE_k)\right] d^3x \\
&= \varepsilon_0 \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(E_i^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}(E_iE_j)+\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iE_k)\right] d^3x
\end{aligned}$$

となる。従って全成分を考えると

$$\boldsymbol{F}=\int_V \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \partial_x(E_x^2-\boldsymbol{E}^2/2)+\partial_y(E_xE_y)+\partial_z(E_xE_z) \\ \partial_x(E_yE_x)+\partial_y(E_y^2-\boldsymbol{E}^2/2)+\partial_z(E_yE_z) \\ \partial_x(E_zE_x)+\partial_y(E_zE_y)+\partial_z(E_z^2-\boldsymbol{E}^2/2) \end{pmatrix} d^3x \tag{10}$$

である。中身の行列部分は

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \partial_x(E_x^2-\boldsymbol{E}^2/2)+\partial_y(E_xE_y)+\partial_z(E_xE_z) \\ \partial_x(E_yE_x)+\partial_y(E_y^2-\boldsymbol{E}^2/2)+\partial_z(E_yE_z) \\ \partial_x(E_zE_x)+\partial_y(E_zE_y)+\partial_z(E_z^2-\boldsymbol{E}^2/2) \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_x^2-\frac{1}{2}E^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y^2-\frac{1}{2}E^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2-\frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix}}_{:=\boldsymbol{T}^e}\right]^T \\
&= (\nabla^T \boldsymbol{T}^e)^T \\
&= (\nabla, \boldsymbol{T}^e)^T
\end{aligned}$$

である。最後に内積

$$(A,B)=A^\dagger B=\overline{A^T}B$$

が現れたので、ベクトルの場合と同様、これをテンソルの発散と見ることができよう。そして §5 で後述するように、このテンソルの発散においても Gauss の発散定理が使える。したがって (10) 右辺の体積積分を面積分に直せば、

$$\boldsymbol{F}=\int_{\partial V} \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2-\frac{1}{2}E^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y^2-\frac{1}{2}E^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2-\frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{n}dS$$

となることがわかる。これは**体積 V の表面 ∂V 上に、電場の寄与によってかかる力の総和**と解釈できるだろう。被積分関数に 3 行 3 列の行列が現れるのは、右辺が「力」ベクトルの積分 (総和) になっていることから推察可能である。方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ と内積したときに、被積分関数が 3 次元ベクトルにならなければならないからである。

4.2 各種テンソルの定義と行列表示

上記の考察に基づき、以下によって Maxwell の応力テンソルを定義する。

$$\boldsymbol{T}^e = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} T^e_{xx} & T^e_{xy} & T^e_{xz} \\ T^e_{yx} & T^e_{yy} & T^e_{yz} \\ T^e_{zx} & T^e_{zy} & T^e_{zz} \end{pmatrix} := \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}E^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y^2 - \frac{1}{2}E^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2 - \frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^m = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} T^m_{xx} & T^m_{xy} & T^m_{xz} \\ T^m_{yx} & T^m_{yy} & T^m_{yz} \\ T^m_{zx} & T^m_{zy} & T^m_{zz} \end{pmatrix} := \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}B^2 & B_xB_y & B_xB_z \\ B_yB_x & B_y^2 - \frac{1}{2}B^2 & B_yB_z \\ B_zB_x & B_zB_y & B_z^2 - \frac{1}{2}B^2 \end{pmatrix}$$

それぞれの成分表示は

$$T^e_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_iE_j - \frac{1}{2}E^2\delta_{ij} \right), \quad T^m_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_iB_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij} \right)$$

となる。

これを参考にすれば、列ベクトル

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

及び 3 行 3 列の単位行列 $\boldsymbol{I}$ を用いて

$$\boldsymbol{T}^e = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{T}^m = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T - \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}$$

である。

4.3 テンソルであることの確認

さて、直交行列 $\boldsymbol{A}$ で表される空間座標回転[*5] により、電磁場が $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ と変換されたとする。このとき新しい応力テンソルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}'^e &= \varepsilon_0(\boldsymbol{A}\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{E})^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0(\boldsymbol{A}\boldsymbol{E})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} \\ &= \varepsilon_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{A}^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}\boldsymbol{I} \\ &= \boldsymbol{A}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{A}^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{I} \\ &= \boldsymbol{A}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{A}^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^T \end{aligned}$$

[*5] ここで座標変換を空間座標回転に限るのは、磁場が軸性ベクトルのためである [3]。実際 $\boldsymbol{A}$ が直交行列であっても、$\det \boldsymbol{A} < 0$ なる座標変換では $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ で基礎方程式を保存しない。例えば $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}$ の場合、$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ が成り立つが、$\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}$ で Lorentz 力 (1) は $-m\ddot{\boldsymbol{r}} = -e\boldsymbol{E} + e(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})$ となって右辺第 2 項の符号が反転する。

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^e\boldsymbol{A}^T - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{A}E^2\boldsymbol{A}^T \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^e\boldsymbol{A}^T
\end{aligned}
$$

を満たす。ただし、4 つ目の等号では $\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{A}({}^t\boldsymbol{E}\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^T$ を足し引きしている。$\boldsymbol{T}^e \to \boldsymbol{T}^m,\ \varepsilon_0 \to 1/\mu_0,\ \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}$ とすれば、全く同じ計算で $\boldsymbol{T}'^m = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^m\boldsymbol{A}^T$ となるので、足しあわせて $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^T$ が成り立つ。この両辺を成分表示すると、

$$
(\boldsymbol{T}')_{ij} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^T)_{ij} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})_{il}\boldsymbol{A}^T_{lj} = \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{T}_{kl}\boldsymbol{A}_{jl}
$$

となって、テンソルの定義としてよく用いられる等式 $\boldsymbol{T}'_{ij} = a_{ik}a_{jl}\boldsymbol{T}_{kl}$ を満たしている。

また $\boldsymbol{A}$ が直交行列であることを考慮すれば、**基底の変換を行なっている**と理解できよう。$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ なので、$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ となって、以下の図式を満たしていることを考えると良い。つまり $\boldsymbol{T}'$ は、図式右側の新基底において $\boldsymbol{T}$ に対応する作用になっていると解釈できる。

$$
\begin{array}{rcl}
\text{旧基底} & & \text{新基底} \\
\boldsymbol{v} & \xrightarrow{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{T}\downarrow & & \downarrow\boldsymbol{T}' \\
\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} & \xrightarrow{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}
\end{array}
$$

「$\boldsymbol{T}$ を作用させてから基底を変換するのと、基底を変換してから $\boldsymbol{T}'$ を作用させるのとで、同じ変換となるようにする」と捉えれば、なおわかりやすいのではないか。$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^T$ は図式右上から右下へ移る際に、真っ直ぐ下がるか反時計回りに迂回するかを表しているのが一目瞭然である。

4.4 テンソルの発散の定義

テンソルの発散は以下で定義する。

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{T} := \begin{pmatrix} \partial_x T_{xx} + \partial_y T_{yx} + \partial_z T_{zx} \\ \partial_x T_{xy} + \partial_y T_{yy} + \partial_z T_{zy} \\ \partial_x T_{xz} + \partial_y T_{yz} + \partial_z T_{zz} \end{pmatrix} = (\nabla, \boldsymbol{T})^T, \quad (\operatorname{div}\boldsymbol{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}
$$

なお、内積は左側成分を転置するものとする。すなわち $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$ である。本来、量子力学のブラケット記法に従って、複素であれば $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{Y}$ のように共役も取りたいところではあるが、今回は実なので共役の有無は問題にならない。また $\boldsymbol{T}$ が対称行列なので、添字の前後についても熟慮は不要であろう。

4.5 テンソルの発散の具体形

上記の発散の定義をもとに、応力テンソルの発散の具体形を求める。その際、いちいちベクトルを持ち出すのではなく、第 i 成分 $(i = x, y, z)$ について計算していく。Levi-Civita 記号に対し $\epsilon_{ijk} = 1$ を満たすように、すなわち ijk と xyz がサイクリックになるように添字をとって、

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div}\boldsymbol{T}^e)_i &= \frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_0 E_i^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_i^2 + E_j^2 + E_k^2)\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_0 E_j E_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_0 E_k E_i) \\
&= \varepsilon_0\left(E_i\frac{\partial E_i}{\partial x_i} - E_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - E_k\frac{\partial E_k}{\partial x_i} + E_j\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + E_i\frac{\partial E_j}{\partial x_j} + E_k\frac{\partial E_i}{\partial x_k} + E_i\frac{\partial E_k}{\partial x_k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_0 \left[E_i \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i} + \frac{\partial E_j}{\partial x_j} + \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \right) - E_j \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) + E_k \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right) \right] \\
&= \varepsilon_0 [E_i \operatorname{div} \boldsymbol{E} - E_j (\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_k + E_k (\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_j] \\
&= (\operatorname{div} \boldsymbol{D}) E_i - (\boldsymbol{D} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E})_i
\end{aligned}
$$

となる。従って

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{T}^e = (\operatorname{div} \boldsymbol{D}) \boldsymbol{E} - \boldsymbol{D} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E}
$$

である。$E \to B, \quad \varepsilon_0 \to 1/\mu_0$ と置き換えれば、全く同じ計算で

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{T}^m = \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{div} \boldsymbol{B}) \boldsymbol{B} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H}
$$

となる。なお、第 2 の等号で磁気単極子不在 (5) を用いた。

かくしてテンソルの発散を得たので、(7) 式をもう一度振り返ろう。

$$
\frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{G}_m + \frac{1}{c^2} \int d^3x \, \boldsymbol{S} \right) = \int d^3x \left[(\operatorname{div} \boldsymbol{D}) \boldsymbol{E} - \boldsymbol{D} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \right] \tag{7}
$$

右辺はまさしく

$$
\int d^3x (\operatorname{div} \boldsymbol{T}^e + \operatorname{div} \boldsymbol{T}^m)
$$

である。これで (8) 式が得られた。

5　テンソルにおける Gauss の発散定理

これまでの電磁気学で使ってきた Gauss の発散定理はあくまでベクトルの発散に対して使ってきたものである。しかし今回は 2 階テンソル（行列）の発散に対して用いることになるので、再度証明を要する。

5.1　ベクトルでの Gauss の発散定理の証明

以下、テンソルでの証明の方針とするためにベクトルでの証明 [4] を振り返る。不要なら次節 §5.2 から読み進めても良い。

$V = \delta x \delta y \delta z$ を微小体積とした上で、

$$
\begin{aligned}
\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} (i_x n_x dS + i_y n_y dS + i_z n_z dS) \\
&= \lim_{V \to 0} \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} [i_x(x + \delta x, y, z) - i_x(x, y, z) \delta y \delta z + \cdots] \\
&= \lim_{V \to 0} \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \left(\frac{\partial i_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \cdots \right) \\
&= \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} \\
&= \operatorname{div} \boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

両辺を体積積分すれば Gauss の発散定理が導かれる。

これを逆順に辿ってテンソルの場合の証明を行おう。

5.2　2 階テンソルでの Gauss の発散定理の証明

定義によって

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} &= \frac{\partial \boldsymbol{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_z}{\partial z} \\
&= \lim_{V\to 0} \frac{1}{\delta x \delta y \delta z}\left(\frac{\partial \boldsymbol{T}_x}{\partial x}\delta x \delta y \delta z + \cdots\right) \\
&= \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}[(\boldsymbol{T}_x(x+\delta x, y, z) - \boldsymbol{T}_x(x, y, z))\delta y \delta z + \cdots] \\
&= \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint_{\partial V}(\boldsymbol{T}_x \cdot \boldsymbol{n}_x dS + \boldsymbol{T}_y \cdot \boldsymbol{n}_y dS + \boldsymbol{T}_z \cdot \boldsymbol{n}_z dS) \\
&= \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint_{\partial S}\boldsymbol{T}\cdot \boldsymbol{n} dS
\end{aligned}$$

である。両辺を体積積分すれば、2 階のテンソルに関する Gauss の発散定理

$$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{T}\, d^3x = \oint_{\partial V}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

が得られる。

以上によって、(8) 式

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_m + \frac{1}{c^2}\int d^3x\, \boldsymbol{S}\right) = \int d^3x(\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^e + \mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^m) = \int d^3x\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} \tag{8}$$

に Gauss の発散定理を用いることで、(9) 式が導かれた。

6　点電荷系運動量保存の直観的解釈

さて、(9) 式に戻ろう。

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{G}_m(t) + \boldsymbol{G}_f(t)\right) = \int \boldsymbol{n}dS\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{G}_m(t) := \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i(t), \quad \boldsymbol{G}_f(t) := \frac{1}{c^2}\int d^3x\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)$$

$\boldsymbol{G}_m$ は点電荷の運動量の総和である。また §4.1 で考察したように、$\boldsymbol{T}$ は電場の寄与によって体積 V の表面にかかる力の総和とみなせる。残った $\boldsymbol{G}_f$ は場の運動量と見なすことができる。物体にまつわる概念「運動量」を場に適用していることからわかるように、いかにもエーテルを仮定した表現になっている。かくしてエーテルの存在がより一層信じられていくことになるのだが、それはまた別の話。

参考文献

[1] 砂川重信, 1999, 「理論電磁気学 第 3 版」pp. 55-57

[2] Ibid. pp. 24-25

[3] Ibid. pp. 39-42

[4] Ibid. p. 444