

# Schwarz-Christoffel 変換を用いた電場境界値問題の覚書

低音

2022 年 9 月 28 日

## 1 必要な知識

本記事では

- 等角写像を用いた 2 次元静電場決定問題の解法の原理
- 複素積分
- 軌跡

についての理解が必要不可欠である。等角写像法については、「等角写像の実部・虚部が Cauchy-Riemann の関係式から Laplace 方程式の解となることを利用して、電位の Laplace 方程式の解を求める」という程度の理解があれば問題ない。

アドバンストに読みたければ

- 位相
- 多様体

についての簡単な知識があると良い。当然、なくても読めるように書いているので安心されたい。

## 2 等角写像を探す方針

### 2.1 2つの複素平面の役割

2次元の静電場を求める際に等角写像を用いる方法がある。等角写像 (複素正則関数)  $f: z \mapsto w$  によって、「位置  $z$  での電位は  $\phi(z) = \operatorname{Re} w$  (または  $\operatorname{Im} w$ ) である」とできれば、あとは勾配を計算して電場を求めるだけとなる。が、境界における電位を的確に反映する等角写像  $f$  を探すのは至難の業だ。これを定式化できるのであれば、プロトコルとして定式化し、汎用性を高くしたい。その定式化の方針を立てていこう。

まず  $z$  平面は物体の配置・形状を表すための平面である。 $z = x + iy$  を使って電位  $\phi(x, y)$  を求めることを考えれば、この意味を理解するのは難しくない。したがって、 $z$  平面ではじめに考える曲線は、境界条件を与える物体 (基本的に導体) の形状に沿うものである。例えば半径  $r$  の導体球が存在するなら、まず  $|z - c| = r$  の曲線上で等電位であることを議論する。

他方、 $w$  平面は電位を表すための平面である。Cauchy-Riemann の関係式の要求から、 $w$  は実部か虚部かが電位を表す。電場の決定問題で等角写像を使う理由が Cauchy-Riemann の関係式にあるため、自明と



図1  $z$ が導体表面上を動くときの  $w$ の挙動

すら言えよう。今回は図の描きやすさと参考文献 [1]での使い方から、**虚部が電位を表すように、すなわち  $\phi(z) = \text{Im } w$  となるように統一する。**

## 2.2 導体表面上における等角写像の挙動

さて、特に導体表面上では電位が一定であるから、 $z$ が導体表面を動くとき、 **$w$ の虚部は不変となる**。そして境界面上で連続になるという妥当な要求をすれば、 $z$ が電位  $\phi$ の導体表面を動く間、 **$w$ は実軸に平行な直線  $\text{Im } w = \phi$ の上を左右にのみ動く** (図1)。

では、この「 $z$ が電位  $\phi$ の導体表面を動く」というのを、どのように表現したらよいか。高校数学で少々世話になった**軌跡**の話を思い出す言葉の使い方だろう。軌跡を表すのに、高校数学では主にどんな道具を使ったか。

そう、**パラメーター**である。結局のところ、**導体系の静電場決定問題で使う等角写像は、パラメーターを使った軌跡の問題に帰着**される。複素平面と複素平面をつなぐために一見するとわかりにくいものの、根本の考え方は高校数学と大差ない。

パラメーター  $t \in \mathbb{R}$ を使うことで、導体表面は複素平面上の曲線  $z(t) = x(t) + iy(t)$ で表され、そのときの電位は  $\phi(t) = \text{Im } w(t)$ となる。 $z$ と  $w$ が  $t$ の関数で表せたら、あとは「導体表面に対応する点では  $t \in \mathbb{R}$ が存在する」という条件からパラメーター  $t$ を消去し、導体表面での電位を虚部で与える軌跡  $w = g(z)$ がもどまる。電位  $\phi(z) = \text{Im } w = \text{Im } g(z)$ は境界条件を満たし、軌跡  $g$ が正則関数なら Cauchy-Riemann の関係式から  $\Delta \text{Im } g = 0$ となる。この  $g$ こそ冒頭で求めていた等角写像  $f$ に他ならない。

## 2.3 パラメーターに関する注意

ここで、 $t$ というパラメーターはあくまで導体表面をなぞる曲線のためだけに置いたものだ。曲線を表すにはパラメーターは1つの実数で十分なので、 $t$ という文字を使った。しかし、我々が求めたいのは、導体表面に限らず平面内の点で電位を表せるような等角写像である。その性質として「 $z$ が2次元領域を動くと、 $w$ は複素平面上を動く」ことが要求される。 $z$ や  $w$ が2次元であるから、パラメーター  $t$ も2次元でなければならない。<sup>\*1</sup>この理由により、パラメーターに複素数を使おう。 $t$ だと文字の使用場面の傾向から実数とみられかねないので、パラメーターには  $\zeta$ を使う。

これで一番大枠の方針は掴めただろう。しかし、この説明だけでは等角写像の問題はパラメーターを入れて軌跡で解くことは難しいに違いない。いざパラメーター  $\zeta$ を使ったところで、 $z(\zeta)$ や  $w(\zeta)$ の関数形は想像もつかないだろう。また、作り方によっては関数が開領域で正則になるか(等角写像になるか)も非自明である。<sup>\*2</sup>巨人の肩に乗ろう。

<sup>\*1</sup> 多様体ができる読者に向けて書けば、パラメーター  $t$ を使って局所座標  $t \mapsto z, t \mapsto w$ で写した先の空間が  $z, w$ 平面内の2次元多様体となるためには、局所座標は定義域を2次元空間内の開集合としなければならないことを表している。

<sup>\*2</sup> 境界では基本的に正則とならないことに注意。金属内側から境界上の点に近づく微分と、金属外側から近づく微分では、一般に値

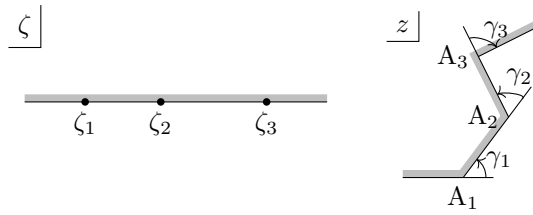


図2  $\zeta$  平面から  $z$  平面への Schwarz-Christoffel 変換

### 3 Schwarz-Christoffel 変換

そこで登場するのが Schwarz-Christoffel 変換を用いた方法である。

Schwarz-Christoffel 変換

$i \in \{1, \dots, n\}$  に対し、 $\zeta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$  をとる。ただし  $\sum_i \gamma_i = 2\pi$  とする。このとき、微分方程式

$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta - \zeta_1)^{-\gamma_1/\pi} \dots (\zeta - \zeta_n)^{-\gamma_n/\pi} \quad (k \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

の解は、 $\zeta$  平面の上半平面を、頂点の外角が  $\gamma_i$  となるような  $z$  平面の (凸とは限らない) 多角形内部に移す変換である。

一般的な描像は図2に示している。証明が気になる読者は [2] p.257 などを見てもらうとして、ここでは境界に関するイメージをつかむ程度にしよう。

#### 3.1 Schwarz-Christoffel 変換の境界線における挙動のイメージ

$\zeta$  を  $-\infty$  から  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  を通って  $+\infty$  まで、実軸上を右に動かす。 $\zeta \in (\zeta_i - \varepsilon, \zeta_i + \varepsilon)$  での挙動を考えよう。 $\zeta$  が  $\zeta_i$  の左から右に移るとき、 $\zeta - \zeta_i$  の符号が変わり、それ以外の部分は滑らかに変化する。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_i-\varepsilon} &= (-\varepsilon)^{-\gamma_i/\pi} k(\zeta - \zeta_1)^{-\gamma_1/\pi} \dots \\ \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_i+\varepsilon} &= \varepsilon^{-\gamma_i/\pi} k(\zeta - \zeta_1)^{-\gamma_1/\pi} \dots \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_i+\varepsilon} &= \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_i-\varepsilon} (-1)^{\gamma_i/\pi} \\ &= \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_i-\varepsilon} e^{i\gamma_i} \end{aligned}$$

となる。 $dz/d\zeta$  は  $z$  平面上での方向ベクトルに相当するので、 $\zeta$  が  $\zeta_i$  を超えることで方向ベクトルの偏角が反時計回りに  $\gamma_i$  だけ回っていることがわかる。これゆえに条件文に「外角  $\gamma_i$ 」であったり「 $\zeta$  平面上の多角

が異なる。

形」という言葉が登場する。多角形の外角の和は一般に  $2\pi$  であるから、前提条件として  $\sum_i \gamma_i = 2\pi$  が要求されている。

### 3.2 静電場の境界値問題を解くプロトコル

§2.1 で掲げた通り、静電場の境界値問題において等角写像で繋ぐべきは、導体系の形状を表す  $z$  平面と、空間の電場を虚部で表す  $w$  平面である。できることなら一発で  $z \mapsto w$  の変換を持ってきたいところだが、そんな天才的発想が可能な頭脳を持ち合わせていない我々は、パラメーター  $\zeta$  を一度媒介して  $z$  と  $w$  を繋ぐという手法を取ろう。

ということで、 $\zeta$  平面から  $z$  平面への Schwarz-Christoffel 変換と、 $\zeta$  平面から  $w$  平面への Schwarz-Christoffel 変換とで、2 回にわたって変換を行う。

静電場の境界値問題を解くプロトコル

1.  $\zeta \mapsto z$  の Schwarz-Christoffel 変換を導出する
  - (a) 境界値を与える導体表面を表す直線などを  $z$  平面に描く
  - (b) 直線の無限遠点での交点を頂点と見做して多角形  $P$  を作る
  - (c)  $P$  の外角  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  を数え上げる
  - (d)  $P$  の頂点  $z_1, \dots, z_n$  に対応する  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  を順に  $\zeta$  平面実軸上にとる
  - (e) Schwarz-Christoffel 変換の微分方程式 (1) を積分して解く
  - (f)  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  近傍での  $\zeta$  の動きと  $z_1, \dots, z_n$  近傍での  $z$  の挙動から係数  $k$  と積分定数を決定する
2.  $\zeta \mapsto w$  の Schwarz-Christoffel 変換を導出する
  - (a) 境界における電位を虚部にもつ実軸に平行な直線を  $w$  平面に描く
  - (b) 直線の無限遠点での交点を頂点と見做して多角形  $Q$  を作る
  - (c)  $Q$  の外角  $\delta_1, \dots, \delta_n$  を数え上げる
  - (d)  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  を順に  $Q$  の頂点  $w_1, \dots, w_n$  に対応させる
  - (e) Schwarz-Christoffel 変換の微分方程式 (1) を積分して解く
  - (f) 対応する  $\zeta$  平面と  $w$  平面の点での値によって係数  $k$  と積分定数を決定する
3.  $\zeta$  を消去して変換  $f: z \mapsto w$  を求める
4.  $\phi(x, y) = \text{Im } f(x, y)$ ,  $\mathbf{E} = -\text{grad } \text{Im } f$

### 3.3 例題

習うより慣れよの言葉に従い、実際に例題を使って使い方を見ていこう。

例題

図 3 のように無限平面導体板と、直角に曲げられた無限導体板とが、間隔  $b$  で平行に置かれ、それぞれの電位が  $0, V_0$  に保たれているとき、 $z$ - $w$  変換を求めよ。([1] pp. 143-)

以下、解法は [1] に従う。等角写像法を知らずにこの手の問題が出てこようものなら、我々は手の打ちようがない。

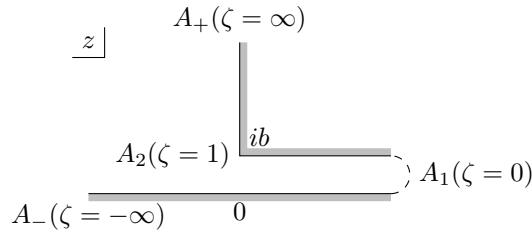


図3  $z$  平面

### 3.3.1 $\zeta \mapsto z$ の Schwarz-Christoffel 変換を導出する

まずは導体系の形状を反映した  $z$  平面への変換を探す。

初めに、 $z$  平面における導体表面の配置を多角形で表す。このとき、平行な直線は「無限遠点で交わる」と捉えるのが肝要である (cf. §4)。多角形は図3のようになる。

各頂点を順に  $A_1, A_2$  としよう。頂点  $A_1$  は無限遠点である。下の直線の左側の極限の点  $A_-$  と、上向きの直線の上側の極限の点  $A_+$  は、無限遠点で同一な点を表し、多角形の頂点を成しているとみなすことができるが、今回は「多角形が閉じている」ということを除いてその事実を使わない。

続いて  $A_1, A_2$  の外角を測る。 $A_1$  では方向ベクトルが  $\theta = 0$  の向きから  $\theta = \pi$  に変わっているので、外角は  $\gamma_1 = \pi$ 、 $A_2$  では  $\theta = \pi$  から  $\theta = \pi/2$  に変わって  $\gamma_2 = -\pi/2$  である。外角は偏角と同じく反時計回りを正にとることに注意。また Schwarz-Christoffel 変換の要件に  $\sum_i \gamma_i = 2\pi$  というものがあるが、不足分の外角  $2\pi - \pi - (-\pi/2) = 3\pi/2$  は無限遠点  $A_+, A_-$  で適切に処理されるものとする。§4 で紹介する Riemann 面を考慮すれば、この妥当性も理解できよう。

次いで  $A_1, A_2$  に対応する点を  $\zeta$  平面実軸上にとる。この点の位置は順番さえ守ればどこでも構わないので、図4の通り、 $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 1$  としよう。

必要な道具は全て揃った。Schwarz-Christoffel 変換の式は

$$\frac{dz}{d\zeta} = k_1 \zeta^{-1} (\zeta - 1)^{1/2}.$$

積分して

$$z = \int dz = \int k_1 \frac{(\zeta - 1)^{1/2}}{\zeta} d\zeta.$$

ここで、

$$u = (1 - \zeta)^{1/2} \tag{2}$$

と変数変換して

$$\begin{aligned} z &= \int k_1 \frac{ui}{1-u^2} 2udu \\ &= ik_1 \int \left( \frac{2}{(1-u)(1+u)} - 2 \right) du \\ &= ik_1 \int \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} - 2 \right) du \\ &= -ik_1 \left( \ln \frac{1-u}{1+u} - 2u \right) + k_2 \end{aligned}$$

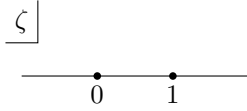


図4  $\zeta$  平面

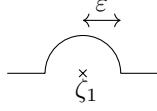


図5  $\zeta_1$  近傍積分経路

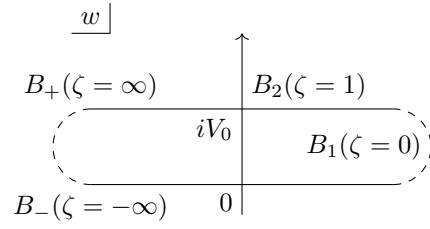


図6  $w$  平面

となる。

あとは定数  $k_1, k_2$  を決めるのみだ。  $A_1$  に対応する  $\zeta_1 = 0$  は変換式の特異点になっているので、図5に示す経路をとって積分する。

ここで、  $\zeta = \varepsilon e^{i\theta}$  にて

$$dz = k_1 \frac{(\varepsilon e^{i\theta} - 1)^{1/2}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon e^{i\theta} i d\theta$$

であり、  $z$  は  $+\infty$  から  $+\infty + ib$  に遷移するので、

$$\int_{\infty}^{\infty+ib} dz = \int_{\pi}^0 k_1 (\varepsilon e^{i\theta} - 1)^{1/2} i d\theta$$

$$ib = k_1 \pi$$

$$\therefore k_1 = \frac{ib}{\pi}$$

一方  $A_2$  は正則点であるから特別の配慮は不要である。  $A_2$  では  $u = 0$  なので、  $u$  と  $z$  の値を  $z$  の表式に代入して、

$$k_2 = ib.$$

以上によって  $\zeta \mapsto z$  の Schwarz-Christoffel 変換

$$z = \frac{b}{\pi} \left( \ln \frac{1+u}{1-u} - 2u \right) + ib \tag{3}$$

が得られた。

### 3.3.2 $\zeta \mapsto w$ の Schwarz-Christoffel 変換を導出する

今度は  $\zeta$  平面から虚軸が電位を表す  $w$  平面への Schwarz-Christoffel 変換を導く。平面の内部での多角形の取り方が異なる以外は、§3.3.1 と全く同じ方針になる。

まずは図6に示すように、境界値における電位を虚部にもち、実軸に平行な直線を描いておく。

$A_1$  では  $\phi = 0 \rightarrow V_0$  と変化しているので、  $\zeta_1$  に対応する  $w$  平面での頂点  $B_1$  は  $\infty$  と  $\infty + iV_0$  に対応する無限遠点である。一方  $A_2$  では電位変化がないため、  $w$  平面上側の直線のどこかしらに  $\zeta_2$  と対応する点  $B_2$  が置かれる。実部は何でも良いので、計算の便益を考え  $w_2 = iV_0$  としておこう。

このとき多角形各頂点の外角は  $\delta_1 = \pi, \delta_2 = 0$  となるので、 Schwarz-Christoffel 変換式 (1) によって

$$\frac{dw}{d\zeta} = k_1 \zeta^{-1}$$

$$\therefore w = k_1 \ln \zeta + k_2$$

が直ちに得られる。

ここで  $\zeta$  の 2 点と  $w$  の 2 点の対応から定数  $k_1, k_2$  を決定するのだが、今回は代表点にわざわざ特異点を選ぶ必要はない。特異点となっている  $\zeta = \zeta_1 = 0$  以前では、図 3 でいうところの実軸の直線上にあり、電位は常に 0 である。特に  $\zeta = -1$  に相当する点も、図 3 実軸上どこかしらにあって、電位は 0 である。現時点では、 $w$  の式を確定させていないので、 $w$  平面の  $\zeta < 0$  の部分と  $z$  平面の実軸との関係性は独立している。従って、 $\zeta = -1$  に対応する点が  $w$  平面の原点にあるとしてもよい。これにより、特異点周りに経路をとって積分するようなことをせずに済んだ。

$w$  の表式に  $\zeta = -1, w = 0$  を代入して

$$0 = i\pi k_1 + k_2.$$

一方  $B_2$  での挙動を  $w$  の表式に代入すれば

$$\begin{aligned} iV_0 &= -\frac{iV_0}{\pi} \ln |1| + k_2 \\ \therefore k_2 &= iV_0 \end{aligned}$$

となるので、

$$k_1 = -\frac{V_0}{\pi}$$

が得られる。

したがって

$$w = -\frac{V_0}{\pi} \ln \zeta + iV_0 \quad (4)$$

となる。

### 3.3.3 パラメーター $\zeta$ を消去する

ここまでで、 $\zeta \mapsto z$  の変換 (3) と  $\zeta \mapsto w$  の変換 (4)、及び変数変換の関係式 (2) が得られている。この 3 本と、導体表面上で  $\exists \zeta \in \mathbb{R}$ , それ以外の多角形内部の点で  $\exists \zeta \in \mathbb{C}$  となる条件から  $\zeta$  を消去していく。なお、導体表面上で実数となるように (3) と (4) を構成してきたので、考えなければならないのは  $\zeta \in \mathbb{C}$  の存在条件だけである。つまり単純に  $\zeta$  を代入・消去すれば良い。

まず (4) より直ちに

$$\zeta = \exp\left(i\pi - \frac{w\pi}{V_0}\right) = -e^{-(\pi/V_0)w}$$

が成り立ち、(2) に入れると

$$u = \sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}}.$$

これを (3) に入れて

$$z = \frac{b}{\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}}}{1 - \sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}}} - 2\sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}} \right) + ib$$

となる。

原理的にはこれを  $w = \dots$  の形式に直して虚部をとれば平面内の電位が得られ、さらに勾配をとって電場が決定する。

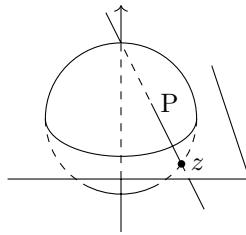


図7 Riemann 球面

### 3.4 注意

以上の例題からもわかるとおり、境界条件を与える導体が複数ある場合に Schwarz-Christoffel 変換を使うには、導体が全て無限遠まで続いていることが要求される。でなければ、 $z$  平面において導体を多角形で「つなぐ」という操作が不可能である。同じ理由から、導体内に穴が複数あるような形状も取り扱うことができない。この手の問題については、他の方法を試す必要がある。

## 4 補足: 複素平面の無限遠点

### 4.1 平行直線が交わる必要性

本記事では「無限遠点」というものを使って、半ば強引に複素平面上で多角形を構成してきた。本来、平行な 2 直線は平面上で決して交わることがない。自明のことと思われるだろうが、それでは困る。Schwarz-Christoffel 変換はあくまで「上半平面を多角形内部に移す」という主張のもとに成り立つ。平行な直線に対して Schwarz-Christoffel 変換を使うためには、どうしてもこの交わらない 2 直線が交わる必要があるのだ。

### 4.2 Riemann 球面

では平行な 2 直線はどこで交わるのか。それを定式化するために、数学の位相空間論に慣れてない読者からすれば少し突飛なことをする。

図 7 に示すような複素平面の原点を中心とする **3 次元球体** を考えよう。当然、実軸と虚軸の他にもう 1 本座標軸が必要である。話をわかりやすくするために半径を 1 とする。

このとき、球面の”北極”に相当する点  $(0, 0, 1)$  を通る直線  $l$  を考える。基本的に  $l$  は球面の他の点  $P$  及び複素平面の点  $z$  と交差する。この  $P$  と  $z$  の対応関係は、北極を除いた Riemann 球面  $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  と複素平面  $\mathbb{C}$  の間の全単射、さらに言うなれば同相写像で与えられる。具体形が与えられなくても、連続性を考慮すれば同相であることが容易に想像できる。

### 4.3 無限遠点

この対応関係は球面上ほぼ全ての点で成り立つが、唯一の例外は、球面と  $l$  の第二の交点が北極となる場合である。このときの  $l = l_0$  は複素平面と平行になり、交点を持たない。しかし  $l_0$  は (偏角を適切に調節した上で)  $P$  を北極に近づける極限操作で得られるものに等しい。  $P$  が北極に近づけば  $|z|$  は際限なく増大する。つ



まり  $l_0$  と複素平面の”交点”  $z_0$  は (当然そんなものは複素平面上ないが)、 $|z| \rightarrow \infty$  の結果として得られるものと考えてるのが自然であろう。

ここで、 $l_0$  には  $z$  軸を中心軸とする回転の自由度があるが、北極以外で  $P$  と  $z$  が 1 対 1 に対応していたことを思い起こすと、北極に対応する点は  $z_0$  ただ一つであって欲しい。ということで、この点  $z_0$  を”無限遠点”  $\infty$  としてしまおう。このように無限遠点を実装した複素平面を  $\hat{\mathbb{C}}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  などと表し、”拡張複素平面”などと呼んだりする。§3.4 で取り上げたように、Schwarz-Christoffel 変換を使った等角写像法では無限遠点を考えるのが必要条件となっているようなものなので、本記事で散々言っていた「複素平面」というのは拡張複素平面のことを指していたことになる。

#### 4.4 平行直線の交点

さて、平行な直線の交点の話に戻ろう。 $\varepsilon$ - $\delta$  論法を使えば、複素平面上で直線をなす点の集合には、絶対値の上限がないことがわかる。それなら直線は無限遠点を通ると考えてもよからう。

これによって、拡張複素平面では平行直線は交点を持つので、適切に多角形を構成することができる。定式化には Schwarz-Christoffel 変換の証明に一工夫が必要だが、それさえ達成すれば §3.2 で示した方針が適用できる。

### 参考文献

- [1] 後藤憲一, 山崎修一郎「詳解電磁気学演習」(1970), 共立出版
- [2] L. V. Ahlfors (笠原乾吉 訳)「複素解析」(1982), 現代数学社