

Schwarz-Christoffel 変換を用いた電場境界値問題の解法

齊藤 巧磨

変更履歴

2022 年 9 月 28 日 初版

2025 年 3 月 4 日 表記の修正

1 必要な知識

本稿では

- 等角写像を用いた 2 次元静電場決定問題の解法の原理
- 複素積分
- 軌跡

についての理解を前提とする。

2 等角写像を探す方針

2.1 2 つの複素平面の役割

2 次元の静電場を求める際に等角写像を用いる方法がある。等角写像（複素正則関数） $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto w$ によって、「位置 (x, y) での電位は $\phi(x, y) = \operatorname{Im} w$ （または $\operatorname{Re} w$ ）である」とできれば、勾配 $-\nabla\phi$ から電場を得る。が、境界における電位を的確に反映する等角写像 f を探すのは一般に難しい。これを定式化できるのであれば、プロトコルとして定式化し、汎用性を高くしたい。その定式化の方針を立てるのが本稿の目的である。

複素平面 z を 2 次元物体の配置・形状を表すための平面とする。 $z = x + iy$ を使って、位置 (x, y) における電位を $\phi(x, y)$ とする。したがって、境界条件が与えられたとき、 z 平面上に境界を描く。例えば中心 $c \in \mathbb{C}$ で半径 r の導体球が存在するなら、まず $|z - c| = r$ の曲線上で等電位であることを要請する。

他方、複素平面 w は電位を表すための平面とする。Cauchy-Riemann の関係式の要求から、 w は実部か虚部かが電位を表す。今回は図の書きやすさと参考文献 [1] での使い方から、虚部が電位を表すように、すなわち $\phi(x, y) = \operatorname{Im} w$ となるように統一する。



図 1 z が導体表面上を動くときの w の挙動

2.2 導体表面上における等角写像の挙動

さて、特に導体表面上では電位が一定であるから、 z が導体表面を動くとき w の虚部は不変。そして境界面上で電位が連続になるという妥当な要求をすれば、 z が電位 ϕ の導体表面を動く間、 w は実軸に平行な直線 $\text{Im } w = \phi$ の上を左右にのみ動く（図 1）。

この z が導体表面を動くときの ϕ の挙動を表すという問題は、パラメーターを使った軌跡の問題に帰着される。パラメーター $t \in \mathbb{R}$ を使うことで、導体表面は複素平面上の曲線 $z(t) = x(t) + iy(t)$ で表され、そのときの電位は $\phi(x(t), y(t)) = \text{Im } w(t)$ となる。 z と w が t の関数で表せたら、あとは「導体表面に対応する点では $t \in \mathbb{R}$ が存在する」という条件からパラメーター t を消去すれば、導体表面での電位を虚部で与える軌跡 $w = g(z)$ がもとまる。電位 $\phi(x, y) = \text{Im } w = \text{Im } g(z)$ は境界条件を満たし、軌跡 g が正則関数なら Cauchy-Riemann の関係式から $\Delta \text{Im } g = 0$ となる。この g こそ冒頭で求めていた等角写像 f に他ならない。

2.3 パラメーターに関する注意

ここで、パラメーター t は導体表面をなぞる曲線を表すために置いたものである。曲線を表すにはパラメーターは 1 つの実数で十分なので t という文字を使ったが、我々が求めたいのは導体表面に限らず平面内の点で電位を表せるような等角写像である。その性質として z が 2 次元領域を動くと、 w は複素平面上を動くことが要求される。 z や w が 2 次元であるから、パラメーター t も 2 次元でなければならない。この理由により、パラメーターに複素数 ζ を使う。

一番大枠の方針は以上で尽きている。しかし、パラメーター ζ が与えられたところで、 $z(\zeta)$ や $w(\zeta)$ の関数形を与えるのは難しい。また、作り方によっては関数が開領域で正則になるか（等角写像になるか）も非自明である。^{*1}

3 Schwarz-Christoffel 変換

そこで登場するのが Schwarz-Christoffel 変換を用いた方法である。

^{*1} 境界では基本的に正則とならない。金属内側から境界上の点に近づく微分と、金属外側から近づく微分では、一般に値が異なる。

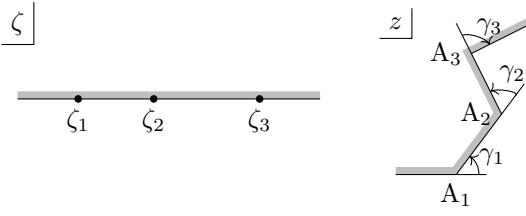


図 2 ζ 平面から z 平面への Schwarz-Christoffel 変換

Schwarz-Christoffel 変換

$i \in \{1, \dots, n\}$ に対し, $\zeta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ をとる. ただし $\sum_i \gamma_i = 2\pi$ とする. このとき, 微分方程式

$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta - \zeta_1)^{-\gamma_1/\pi} \cdots (\zeta - \zeta_n)^{-\gamma_n/\pi} \quad (k \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

の解は, ζ 平面の上半平面を, 頂点の外角が γ_i となるような z 平面の (凸とは限らない) 多角形内部に移す変換である.

一般的な描像は図 2 に示している. 証明は [2] p.257 などを参照. ここでは雰囲気を掴めるように大雑把な説明に留める.

3.1 Schwarz-Christoffel 変換の境界線における挙動のイメージ

ζ を $-\infty$ から $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ を通って $+\infty$ まで, 実軸上を右に動かす. $\zeta \in (\zeta_i - \varepsilon, \zeta_i + \varepsilon)$ での挙動を考える. ζ が ζ_i の左から右に移るとき, $\zeta - \zeta_i$ の符号が変わり, それ以外の部分は滑らかに変化する.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_i-\varepsilon} &= (-\varepsilon)^{-\gamma_i/\pi} k(\zeta - \zeta_1)^{-\gamma_1/\pi} \cdots \\ \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_i+\varepsilon} &= \varepsilon^{-\gamma_i/\pi} k(\zeta - \zeta_1)^{-\gamma_1/\pi} \cdots \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_i+\varepsilon} &= \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_i-\varepsilon} (-1)^{\gamma_i/\pi} \\ &= \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_i-\varepsilon} e^{i\gamma_i} \end{aligned}$$

となる. $dz/d\zeta$ は z 平面上での方向ベクトルに相当するので, ζ が ζ_i を超えることで方向ベクトルの偏角が反時計回りに γ_i だけ回っている. これゆえに条件文に「外角 γ_i 」であったり「 ζ 平面上の多角形」という言葉が登場する. 多角形の外角の和は一般に 2π であるから, 前提条件として $\sum_i \gamma_i = 2\pi$ が要求されている.

3.2 静電場の境界値問題を解くプロトコル

§2.1 で掲げた通り, 静電場の境界値問題において等角写像で繋ぐべきは, 導体系の形状を表す z 平面と, 空間の電場を虚部で表す w 平面である. 一足飛びに $z \mapsto w$ の変換を持ってきたいところだが, それもまた難しい.

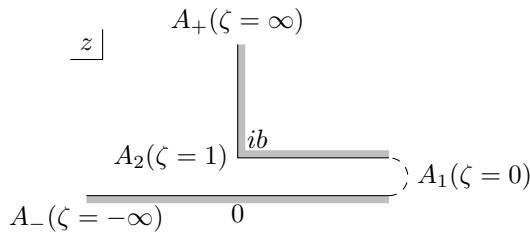


図 3 z 平面

パラメーター ζ を一度媒介して z と w を繋ぐという手法を取る. ζ 平面から z 平面への Schwarz-Christoffel 変換と, ζ 平面から w 平面への Schwarz-Christoffel 変換とで, 2 回にわたって変換を行う.

静電場の境界値問題を解くプロトコル

1. $\zeta \mapsto z$ の Schwarz-Christoffel 変換を導出する
 - (a) 境界値を与える導体表面を表す直線などを z 平面上に描く
 - (b) 直線の無限遠点での交点を頂点と見做して多角形 P を作る
 - (c) P の外角 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ を数え上げる
 - (d) P の頂点 z_1, \dots, z_n に対応する ζ_1, \dots, ζ_n を順に ζ 平面実軸上にとる
 - (e) Schwarz-Christoffel 変換の微分方程式 (1) を積分して解く
 - (f) ζ_1, \dots, ζ_n 近傍での ζ の動きと z_1, \dots, z_n 近傍での z の挙動から係数 k と積分定数を決定する
2. $\zeta \mapsto w$ の Schwarz-Christoffel 変換を導出する
 - (a) 境界における電位を虚部にもつ実軸に平行な直線を w 平面上に描く
 - (b) 直線の無限遠点での交点を頂点と見做して多角形 Q を作る
 - (c) Q の外角 $\delta_1, \dots, \delta_n$ を数え上げる
 - (d) ζ_1, \dots, ζ_n を順に Q の頂点 w_1, \dots, w_n に対応させる
 - (e) Schwarz-Christoffel 変換の微分方程式 (1) を積分して解く
 - (f) 対応する ζ 平面と w 平面の点での値によって係数 k と積分定数を決定する
3. ζ を消去して変換 $f: z \mapsto w$ を求める
4. $\phi(x, y) = \text{Im } f(x, y)$, $\mathbf{E} = -\text{grad Im } f$

3.3 例題

実際に例題を使って使い方を確認する.

例題

図 3 のように無限平面導体板と, 直角に曲げられた無限導体板とが, 間隔 b で平行に置かれ, それぞれの電位が $0, V_0$ に保たれているとき, $z-w$ 変換を求めよ. ([1] pp. 143-)

以下, 解法は [1] に従う.

3.3.1 $\zeta \mapsto z$ の Schwarz-Christoffel 変換を導出する

まずは導体系の形状を反映した z 平面への変換を探す。

初めに, z 平面における導体表面の配置を多角形で表す. このとき, 平行な直線は「無限遠点で交わる」と解釈する. 多角形は図 3 のようになる.

各頂点を順に A_1, A_2 としよう. 頂点 A_1 は無限遠点である. 下の直線の左側の極限の点 A_- と, 上向きの直線の上側の極限の点 A_+ は, 無限遠点で同一な点を表し, 多角形の頂点を成しているとみなすことができるが, 今回は「多角形が閉じている」ということを除いてその事実を使わない.

続いて A_1, A_2 の外角を測る. A_1 では方向ベクトルが $\theta = 0$ の向きから $\theta = \pi$ に変わっているので, 外角は $\gamma_1 = \pi$, A_2 では $\theta = \pi$ から $\theta = \pi/2$ に変わって $\gamma_2 = -\pi/2$ である. 外角は偏角と同じく反時計回りを正にとることに注意. また Schwarz-Christoffel 変換の要件に $\sum_i \gamma_i = 2\pi$ というものがあるが, 不足分の外角 $2\pi - \pi - (-\pi/2) = 3\pi/2$ は無限遠点 A_+, A_- で適切に処理されるものとする.

次いで A_1, A_2 に対応する点を ζ 平面実軸上にとる. この点の位置は順番さえ守ればどこでも構わないので, 図 4 の通り, $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 1$ とする.

Schwarz-Christoffel 変換の式は

$$\frac{dz}{d\zeta} = k_1 \zeta^{-1} (\zeta - 1)^{1/2}.$$

積分して

$$z = \int dz = \int k_1 \frac{(\zeta - 1)^{1/2}}{\zeta} d\zeta.$$

ここで,

$$u = (1 - \zeta)^{1/2} \tag{2}$$

と変数変換して

$$\begin{aligned} z &= \int k_1 \frac{ui}{1-u^2} 2udu \\ &= ik_1 \int \left(\frac{2}{(1-u)(1+u)} - 2 \right) du \\ &= ik_1 \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} - 2 \right) du \\ &= -ik_1 \left(\ln \frac{1-u}{1+u} - 2u \right) + k_2 \end{aligned}$$

となる.

定数 k_1, k_2 を決める. A_1 に対応する $\zeta_1 = 0$ は変換式の特異点になっているので, 図 5 に示す経路をとって積分する.

ここで, $\zeta = \varepsilon e^{i\theta}$ にて

$$dz = k_1 \frac{(\varepsilon e^{i\theta} - 1)^{1/2}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon e^{i\theta} i d\theta$$

であり, z は $+\infty$ から $+\infty + ib$ に遷移するので,

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\infty+ib} dz &= \int_{\pi}^0 k_1 (\varepsilon e^{i\theta} - 1)^{1/2} i d\theta \\ ib &= k_1 \pi \\ \therefore k_1 &= \frac{ib}{\pi}. \end{aligned}$$

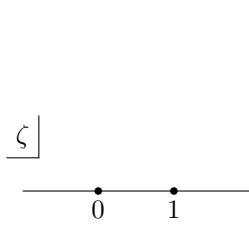


図 4 ζ 平面

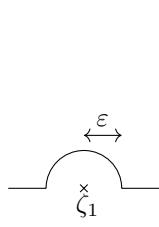


図 5 ζ_1 近傍積分経路

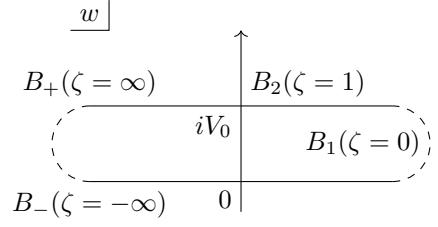


図 6 w 平面

一方 A_2 は正則点であるから特別の配慮は不要である. A_2 では $u = 0$ なので, u と z の値を z の表式に代入して,

$$k_2 = ib.$$

以上によって $\zeta \mapsto z$ の Schwarz-Christoffel 変換

$$z = \frac{b}{\pi} \left(\ln \frac{1+u}{1-u} - 2u \right) + ib \quad (3)$$

が得られた.

3.3.2 $\zeta \mapsto w$ の Schwarz-Christoffel 変換を導出する

今度は ζ 平面から虚軸が電位を表す w 平面への Schwarz-Christoffel 変換を導く. 平面の内部での多角形の取り方が異なる以外は, §3.3.1 と全く同じ方針になる.

まずは図 6 に示すように, 境界値における電位を虚部にもち, 実軸に平行な直線を描いておく.

A_1 では $\phi = 0 \rightarrow V_0$ と変化しているので, ζ_1 に対応する w 平面での頂点 B_1 は ∞ と $\infty + iV_0$ に対応する無限遠点である. 一方 A_2 では電位変化がないため, w 平面上側の直線のどこかしらに ζ_2 と対応する点 B_2 が置かれる. 実部は任意なので, 計算の便益を考え $w_2 = iV_0$ とする.

このとき多角形各頂点の外角は $\delta_1 = \pi, \delta_2 = 0$ となるため, Schwarz-Christoffel 変換式 (1) によって

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= k_1 \zeta^{-1} \\ \therefore w &= k_1 \ln \zeta + k_2 \end{aligned}$$

が直ちに得られる.

ここで ζ の 2 点と w の 2 点の対応から定数 k_1, k_2 を決定するのだが, 今回は代表点にわざわざ特異点を選ぶ必要はない. 特異点となっている $\zeta = \zeta_1 = 0$ 以前では, 図 3 でいうところの実軸の直線上にあり, 電位は常に 0 である. 特に $\zeta = -1$ に相当する点も, 図 3 実軸上どこかしらにあって, 電位は 0 である. 現時点では, w の式を確定させていないので, w 平面の $\zeta < 0$ の部分と z 平面の実軸との関係性は独立している. 従って, $\zeta = -1$ に対応する点が w 平面の原点にあるとしてもよい. これにより, 特異点周りに経路をとって積分するようなことをせずに済んだ.

w の表式に $\zeta = -1, w = 0$ を代入して

$$0 = i\pi k_1 + k_2.$$

一方 B_2 での挙動を w の表式に代入すれば

$$\begin{aligned} iV_0 &= -\frac{iV_0}{\pi} \ln |1| + k_2 \\ \therefore k_2 &= iV_0 \end{aligned}$$

となるので,

$$k_1 = -\frac{V_0}{\pi}$$

が得られる.

したがって

$$w = -\frac{V_0}{\pi} \ln \zeta + iV_0 \quad (4)$$

となる.

3.3.3 パラメーター ζ を消去する

ここまでで, $\zeta \mapsto z$ の変換 (3) と $\zeta \mapsto w$ の変換 (4), 及び変数変換の関係式 (2) が得られている. この 3 本と, 導体表面上で $\exists \zeta \in \mathbb{R}$, それ以外の多角形内部の点で $\exists \zeta \in \mathbb{C}$ となる条件から ζ を消去していく. なお, 導体表面上で実数となるように (3) と (4) を構成してきたので, 考えなければならないのは $\zeta \in \mathbb{C}$ の存在条件だけである. つまり単純に ζ を代入・消去すれば良い.

まず (4) より直ちに

$$\zeta = \exp \left(i\pi - \frac{w\pi}{V_0} \right) = -e^{-(\pi/V_0)w}$$

が成り立ち, (2) に入れると

$$u = \sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}}.$$

これを (3) に入れて

$$z = \frac{b}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}}}{1 - \sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}}} - 2\sqrt{1 + e^{-(\pi/V_0)w}} \right) + ib$$

となる.

原理的にはこれを $w = \dots$ の形式に直して虚部をとれば平面内の電位が得られ, さらに勾配をとって電場が決定する.

3.4 注意

以上の例題からもわかるとおり, 境界条件を与える導体が複数ある場合に Schwarz-Christoffel 変換を使うには, 導体が全て無限遠まで続いていることが要求される. でなければ, z 平面において導体を多角形でつなぐ操作が不可能である. 同じ理由から, 導体内に穴が複数あるような形状も取り扱うことができない. この手の問題については, 他の方法を試す必要がある.

参考文献

- [1] 後藤憲一, 山崎修一郎 「詳解電磁気学演習」 (1970), 共立出版
- [2] L. V. Ahlfors (笠原乾吉 訳) 「複素解析」 (1982), 現代数学社