Else Nayak 1409.5436 個人メモ

齊藤巧磨

2026 年 4 月 24 日

main reference: [EN14]

目次

1 The General Formalism

Assumps. 1

- bosonic SPT phase: bulk で GS が unique gapped, SRE
- bulk の対称性は unitary かつ on-site
- bulk gap より小さいエネルギーに cut off を入れた low-energy Hilbert space (unitary on-site symmetry は boundary 近傍にのみ作用)
- boundary symmetry は local (beyond cohomological classification で破るかも)

1.1 (1+1)-D SPT's

対称性 G の on-site かつ non-anomalous な表現 $\mathcal{U}(g)$ が 1+1D 系に作用するとする。[*1]

1D system の boundary は points a, b である。$U(g) = \tilde{\mathcal{U}}|_{\partial I}(g)$ を boundary a, b に作用する群 G の表現とする。システムサイズを十分大きくとれば a, b には独立に作用するだろう: $U(g) = U_a(g) \otimes U_b(g)$. この $U_a(g)$ を $U(g)$ の a への制限と捉える。この制限は up to phase factor で一意に定義される: $U_a(g) \to$

[*1] on-site は仮定。もし anomalous な表現を許すと、基底状態が複数生じるので SPT 相ではなくなる。

$\beta(g)U_a(g), U_b(g) \to \beta(g)^{-1}U_b(g)$ w/ U(1) valued $\beta(g)$. このため $U_a(g)$ は射影表現になる。

$$U_a(g)U_a(h) = \omega(g,h)U_a(gh)$$

associativity より

$$\omega(g,h)\omega(gh,k) = \omega(g,hk)\omega(h,k)$$

で ω は 2-cocycle である。さらに $U_a(g)$ は g に依存する phase factor を落として定義されているので、

$$\omega(g,h) \sim \beta(gh)\beta(g)^{-1}\beta(h)^{-1}\omega(g,h)$$

この関係を満たす 2-cocycle は $H^2(G,U(1))$ に属する cohomology。「SPT 相が同じ $\Longleftrightarrow$ 同じ $H^2(G,U(1))$ に属する 2-cocycle を持つ」が証明できるので、1+1D SPT 相は $H^2(G,U(1))$ で分類される。

1.2 (2+1)-D SPT's

はじめに SPT の基底状態を考えて、bulk における対称性の線形表現 $U_g, U_h (g,h \in G)$ により

$$\begin{aligned} U_gU_h(\mathcal{H}_{\text{bulk}} \otimes \mathcal{H}_{\text{boundary}}) &= \mathcal{H}_{\text{bulk}} \otimes U_gU_h\mathcal{H}_{\text{boundary}} \\ = U_{gh}(\mathcal{H}_{\text{bulk}} \otimes \mathcal{H}_{\text{boundary}}) &= \mathcal{H}_{\text{bulk}} \otimes U_{gh}\mathcal{H}_{\text{boundary}} \end{aligned}$$

となることを念頭に、boundary では表現が線形表現になることを要請する。

(1+1)-D mfd. の 1 次元境界 C に symmetry $U(g)$ が作用し、それを C の subregion $M \subset C$ に制限する。M は一般に境界つき 1 次元多様体。

ここで $M \subset C$ への local unitary U の制限を定義する。

Def. 1: local unitary U の部分多様体への制限

領域 M に作用する local unitary U_M が U の M への制限 $\Longleftrightarrow$ U_M は boundary ∂M から十分離れた interior で U と同じ作用をする。

- 任意の local unitary に対し M への制限が存在する
- ∂M に作用する local unitary の自由度を除いて定義される

2 番目の条件は (1+1)D のとき edge に位相自由度が宿ったことの一般化である。すなわち $U_M(g)$ は G の表現であって、∂M 近傍に nontrivial に作用する local unitary $\omega_{\partial M}$ を使って

$$U_M(g)U_M(h) = \Omega_{\partial M}(g,h)U_M(gh) \tag{1.1}$$

と書ける。$\Omega_{\partial M}$ は境界全体 C における表現では生じないが、それは C が高次元の多様体の境界なので boundary を持たないためである。

かくして d 次元多様体上のユニタリ表現 $U(g)$ の分類を $(d-1)$ 次元多様体の local unitary obstruction $\omega(g_1,g_2)$ の分類へと落とすことができた。このような次元降下を繰り返して、最終的には 0 次元まで落とすことで議論をする。

(2+1)D SPT の場合、まず 2 次元多様体の境界は 1 次元なので、$\Omega(g_1,g_2)$ はその端点 a,b に作用する。(1.1) とともに associativity より

$$\Omega_{\partial M}(g_1,g_2)\Omega_{\partial M}(g_1g_2,g_3) =^{U_M(g_1)} \Omega_{\partial M}(g_2,g_3)\Omega_{\partial M}(g_1,g_2g_3) \tag{1.2}$$

w/ conjugation notation ${}^{x}y := xyx^{-1}$. [*2] 今度は2回目の制限として $\partial M = \{a, b\}$ から a への制限を与える。制限 $\Omega_{\partial M}(g_1, g_2) \to \Omega_a(g_1, g_2)$ は up to U(1) phase で定められるので、Ω_a は (1.2) 同様の associativity を

$$\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2, g_3)\ {}^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2, g_3)\Omega_a(g_1, g_2g_3) \tag{1.3}$$

の形で満たす。このような ω は 3-cocycle condition

$$\omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1g_2, g_3, g_4)^{-1}\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4)\omega(g_2, g_3, g_4) = 1$$

を満たす。

Prf.

ω が 3-cocycle であることを示すには、$\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3)\Omega_a(g_1g_2g_3, g_4)$ を 2 通りで計算する。まず、Ω_a と Ω_b は十分離れている 2 点に support を持つので交換する。i.e. a 近傍に support を持つ X_a に対して

$${}^{\Omega_a(g_1,g_2)}X_a = {}^{\Omega_a\otimes\Omega_b(g_1,g_2)}\ X_a = {}^{\Omega_{\partial M}(g_1,g_2)}\ X_a. \tag{1.4}$$

$\omega(g_1, g_2, g_3) \in U(1)$ を念頭に、

$$\begin{aligned}
&\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3)\Omega_a(g_1g_2g_3, g_4) \\
&= \Omega_a(g_1, g_2) \times \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\ {}^{U_M(g_1g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)\Omega_a(g_1g_2, g_3g_4) \\
&= \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\ {}^{\Omega_a(g_1,g_2)U_M(g_1g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3g_4) \\
&= \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\ {}^{\Omega_{\partial M}(g_1,g_2)U_M(g_1g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3g_4) \\
&= \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\ {}^{U_M(g_1)U_M(g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3g_4) \\
&= \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\ {}^{U_M(g_1)U_M(g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2, g_3g_4)\Omega_a(g_1, g_2g_3g_4)
\end{aligned}$$

これとは別に、

$$\begin{aligned}
&\Omega_a(g_1, g_2)\Omega_a(g_1g_2, g_3)\Omega_a(g_1g_2g_3, g_4) \\
&= \omega(g_1, g_2, g_3)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2, g_3)\Omega_a(g_1, g_2g_3)\Omega_a(g_1g_2g_3, g_4) \\
&= \omega(g_1, g_2, g_3)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2g_3, g_4)\Omega_a(g_1, g_2g_3g_4) \\
&= \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)^{U_M(g_1)}(\Omega_a(g_2, g_3)\Omega_a(g_2g_3, g_4))\Omega_a(g_1, g_2g_3g_4) \\
&= \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)^{U_M(g_1)}\left[\omega(g_2, g_3, g_4)^{U_M(g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)\Omega_a(g_2, g_3g_4)\right]\Omega_a(g_1, g_2g_3g_4) \\
&= \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4)^{U_M(g_1)U_M(g_2)}\Omega_a(g_3, g_4)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2, g_3g_4)\Omega_a(g_1, g_2g_3g_4)
\end{aligned}$$

以上

$$\omega(g_1g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4) = \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4).$$

さらに $\Omega_a(g, g')$ は up to phase factor $\beta(g, g')$ で定まっているので、

$$\omega(g_1, g_2, g_3) \sim \omega(g_1, g_2, g_3)\beta(g_1, g_2)\beta(g_1g_2, g_3)\beta(g_2, g_3)^{-1}\beta(g_1, g_2g_3)^{-1} \tag{1.5}$$

[*2]

$$\begin{aligned}
U_M(g_1)U_M(g_2)U_M(g_3) &= \Omega_{\partial M}(g_1, g_2)U_M(g_1g_2)U_M(g_3) = \Omega_{\partial M}(g_1, g_2)\Omega_{\partial M}(g_1g_2, g_3)U_M(g_1g_2g_3) \\
&= U_M(g_1)\Omega_{\partial M}(g_2, g_3)U_M(g_2g_3) = {}^{U_M(g_1)}\ \Omega_{\partial M}(g_1, g_2g_3)U_M(g_1g_2g_3)
\end{aligned}$$

を同一視しなければならない。制限 $U(g) \to U_M(g)$ の変更は up to equivalence で 3-cocycle に影響を与えない。

Prf.

U の M への制限として

- $U_M(g)$
- $\tilde{U}_M(g) := \Sigma(g) U_M(g)$ w/ local unitary $\Sigma(g)$ acting near $\partial M = \{a, b\}$

があるとする。

$$\tilde{U}_M(g)\tilde{U}_M(h) = \tilde{\Omega}_{\partial M}(g,h)\tilde{U}_M(gh)$$

の $\tilde{\Omega}_{\partial M}$ は

$$\tilde{\Omega}_{\partial M}(g,h) = \Sigma(g)^{U_M(g)}\Sigma(h)\Omega_{\partial M}(g,h)\Sigma(gh)^{-1}$$

を満たす。[a] 3-cocycle ω の equivalence class は、up t U(1) phase で定められる $\Omega_{\partial M}$ の制限 $\Omega_{\partial M}(g,h) \to \Omega_a(g,h)$ or $\to e^{i\theta(g,h)}\Omega_a(g,h)$ に依存しない: (1.3) はこの制限の取り替えで

$$\begin{aligned}
&e^{i\theta(g_1,g_2)}e^{i\theta(g_1g_2,g_3)}\Omega_a(g_1,g_2)\Omega_a(g_1g_2,g_3)\\
&= \omega'(g_1,g_2,g_3)^{U_M(g_1)}(e^{i\theta(g_2,g_3)}\Omega_a(g_2,g_3))e^{i\theta(g_1,g_2g_3)}\Omega_a(g_1,g_2g_3)
\end{aligned}$$

と変更を受けるが、

$$\omega'(g_1,g_2,g_3) = e^{i\theta(g_1,g_2)}e^{i\theta(g_1g_2,g_3)}e^{-i\theta(g_2,g_3)}e^{-i\theta(g_1,g_2g_3)}$$

となるので、(1.5) にて $\beta(g_1,g_2) = e^{i\theta(g_1,g_2)}$ としたものと一致する。そこで $\tilde{\Omega}_{\partial M} \to \tilde{\Omega}_a$ の制限として

$$\tilde{\Omega}_a(g,g') = \Sigma_a(g)^{U_M(g)}\Sigma_a(g')\Omega_a(g,g')\Sigma_a(gg')^{-1} \tag{1.6}$$

をとる。ここに $\Sigma_a(g)$ は $\Sigma(g)$ の a への制限である。[b] これによって、

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Omega}_a(g_1,g_2)\tilde{\Omega}_a(g_1g_2,g_3)\Sigma_a(g_1g_2g_3)\\
&= \tilde{\Omega}_a(g_1,g_2)\Sigma_a(g_1g_2)^{U_M(g_1g_2)}\Sigma_a(g_3)\Omega_a(g_1g_2,g_3)\\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2)\Omega_a(g_1,g_2)^{U_M(g_1g_2)}\Sigma_a(g_3)\Omega_a(g_1g_2,g_3)\\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2)^{\Omega_a(g_1,g_2)U_M(g_1g_2)}\Sigma_a(g_3)\Omega_a(g_1,g_2)\Omega_a(g_1g_2,g_3)\\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2)^{\Omega(g_1,g_2)U_M(g_1g_2)}\Sigma_a(g_3)\Omega_a(g_1,g_2)\Omega_a(g_1g_2,g_3) \qquad \because (1.4)\\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2)^{U_M(g_1)U_M(g_2)}\Sigma_a(g_3)\Omega_a(g_1,g_2)\Omega_a(g_1g_2,g_3)
\end{aligned}$$

また一方で

$$
\begin{aligned}
&{}^{\tilde{U}_M(g_1)}\tilde{\Omega}_a(g_2,g_3)\tilde{\Omega}_a(g_1,g_2g_3)\Sigma_a(g_1g_2g_3) \\
&={}^{\Sigma(g_1)U_M(g_1)}\ \tilde{\Omega}_a(g_2,g_3)\tilde{\Omega}_a(g_1,g_2g_3)\Sigma_a(g_1g_2g_3) \\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\tilde{\Omega}_a(g_2,g_3)\Sigma_a(g_1)^{-1}\tilde{\Omega}_a(g_1,g_2g_3)\Sigma_a(g_1g_2g_3) \qquad \because (1.4) \\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\tilde{\Omega}_a(g_2,g_3)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2g_3)\Omega_a(g_1,g_2g_3) \qquad \because (1.6) \\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\left[\tilde{\Omega}_a(g_2,g_3)\Sigma_a(g_2g_3)\right]\Omega_a(g_1,g_2g_3) \\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\left[\Sigma_a(g_2)^{U_M(g_2)}\Sigma_a(g_3)\Omega_a(g_2,g_3)\right]\Omega_a(g_1,g_2g_3) \qquad \because (1.6) \\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2)^{U_M(g_1)U_M(g_2)}\Sigma_a(g_3)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2,g_3)\Omega_a(g_1,g_2g_3) \\
&= \Sigma_a(g_1)^{U_M(g_1)}\Sigma_a(g_2)^{U_M(g_1)U_M(g_2)}\Sigma_a(g_3)^{U_M(g_1)}\Omega_a(g_2,g_3) \\
&\qquad\qquad \times\omega(g_1,g_2,g_3)\Omega_a(g_1,g_2)\Omega_a(g_1g_2,g_3) \qquad \because (1.2)
\end{aligned}
$$

以上を比較して、

$$
{}^{\tilde{U}_M(g_1)}\tilde{\Omega}_a(g_2,g_3)\tilde{\Omega}_a(g_1,g_2g_3) = \omega(g_1,g_2,g_3)\tilde{\Omega}_a(g_1,g_2)\tilde{\Omega}_a(g_1g_2,g_3) \tag{1.7}
$$

一方で ω は by definition で、(1.7) にて $\tilde{Omega_a} \to \Omega_a, \tilde{U}_M \to U_M$ としたものを満たすので、ω の equivalence class は U_M を取るか $\tilde{U}_M$ を取るかに依存しない。

---

[a]

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_M(g)\tilde{U}_M(h) &= \Sigma(g)U_M(g)\Sigma(h)U_M(h) = \Sigma(g)^{U_M(g)}\Sigma(h)U_M(g)U_M(h) \\
&= \Sigma(g)^{U_M(g)}\Sigma(h)\Omega_{\partial M}(g,h)
\end{aligned}
$$

[b] $\Sigma_a(g)$ も up to U(1) phase で定められる。

しかも、このような 3-cocycle は by definition で $H^3(G,U(1))$ に属する cohomology で分類される。以上で、2+1D SPT 相は $H^3(G,U(1))$ で分類されることがわかった。

1.3 Higher dimensions

■群作用に関する仮定 空間 d 次元において、$d-1$ 次元 closed space C_1 の上で $\alpha(x)$ によりラベル付けされた基底で張られる Hilbert sp. span$\{|\alpha\rangle\}$ を与える。

Assumps. 2: 空

d 次元の理論の対称性 G がこの上に作用して以下の形で書けることを仮定する。

$$
U(g) = N(g)S(g) \tag{1.8}
$$

s.t.

1. $S(g)$ は対称性の on-site part で、

$$
S(g) = \sum_\alpha |g\alpha\rangle\langle\alpha|
$$

と作用する。ただし $\alpha \to g\alpha$ は classical label α への on-site action.

2. 同じ基底で non-on-site part $N(g)$ は diagonal に

$$N(g) = \sum_{\alpha} e^{i\mathcal{N}^{(1)}(g)[\alpha]} \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right|$$

と作用する。ただし $\mathcal{N}(g)$ は configuration α を実数へ写す写像で、$N(g)$ が local になるように、ひいては $U(g)$ が local unitary になるように、$\mathcal{N}^{(1)}(g)$ も十分 local であることを要請する。

$U(g)$ が線形表現であることを要請すると、$U(g)U(h) = U(gh)$ は

$$g_1\mathcal{N}^{(1)}(g_2) + \mathcal{N}^{(1)}(g_1) - \mathcal{N}^{(1)}(g_1g_2) = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \tag{1.9}$$

を満たす。ただし汎函数への群作用を $(g\mathcal{F}[\alpha] = \mathcal{F}[g^{-1}\alpha])$ とした。

■non-on-site part の reduction　さて、$d-1$ 次元の closed space C_1 の open な部分系 M_1 に $U(g)$ を制限する。$S(g)$ は on-site だったので、$\mathcal{N}^{(1)}(g)$ を制限することに他ならない。制限された汎函数 $\mathcal{N}^{(1)}_{M_1}(g)$ は (1.9) に boundary の寄与が加わった

$$g_1\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}_{M_1}(g_2) + \tilde{\mathcal{N}}^{(1)}_{M_1}(g_1)$$

を満たす。ここに $\mathcal{N}^{(2)}(g_1, g_2)$ は ∂M_1 近傍の α の値にのみ依存する汎函数である。

reduction を繰り返すにあたって、k 個の群元により指定される汎函数 $\mathcal{N}^{(k)}$ を $k+1$ 個の群元により指定される汎函数 $\mathcal{N}^{(k+1)}$ に移す coboundary operator δ_k

$$\begin{aligned}(\delta_k\mathcal{N}^{(k)})(g_1, \cdots, g_{k+1}) := g_1\mathcal{N}^{(k)}_1(g_2, \cdots, g_{k+1}) + (-1)^{k+1}\mathcal{N}^{(k)}(g_1, \cdots, g_k)\\ + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\mathcal{N}^{(k)}(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{k+1})\end{aligned}$$

を定義すると良い。実際、$\delta_1\mathcal{N}^{(1)}$ は (1.9) 左辺に一致する。coboudary operator は chain complex の条件 $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$ を満たすことに注意。

■reduction process の具体的構成　空間 d 次元多様体に作用する対称性の reduction process を構成する。closed $d-k$ 次元多様体 C_k を与える。k 回めのステップでは、

1. 群元を k 個指定することで、C_k 上の関数を実数へ飛ばすような汎函数の set $\mathcal{N}^{(k)}_{C_k}$ であって、かつ $\delta_k\mathcal{N}^{(k)} = 0$ を満たすものが用意されている
2. 汎函数 $\mathcal{N}^{(k)}_{C_k}$ を open submanifold $M_k \subset C_k$ に制限した $\tilde{\mathcal{N}}^{(k)}_{M_k}$ を構成する
3. $\mathcal{N}^{(k+1)}_{C_{k+1}} := \delta_k\tilde{\mathcal{N}}^{(k)}_{M_k}$ は $d-k-1$ 次元多様体 $C_{k+1} := \partial M_k$ 上の汎函数になっている[*3]

こうして構成した $\mathcal{N}^{(k+1)}_{C_{k+1}}$ は、$\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$ から $\delta_{k+1}\mathcal{N}^{(k+1)}_{C_{k+1}} = 0$ を満たす。この操作を $\omega := \mathcal{N}^{(d+1)} := \delta_d\tilde{\mathcal{N}}^{(d)}_{C_d}$ まで繰り返す。ω は $d+1$ 個の群元により指定される 0 次元多様体 C_d 上の U(1) 値汎函数すなわち定数であって、$\delta_{d+1}\omega = 0$ を満たす。これはまさしく U(1) $d+1$-cocycle の定義に他ならない。制限の取り方の任意性があるので、ω は

$$\omega \sim \omega + \delta_{d+1}\lambda \tag{1.10}$$

*3 M_k 内部では $\mathcal{N}^{(k)}_{C_k}$ と $\tilde{\mathcal{N}}^{(k)}_{M_k}$ が一致することに注意。

の任意性がある。ここに $\lambda : G^{\times(d+1)} \to U(1)$. cocycle に (1.10) を入れたものは群コホモロジー $H^{d+1}(G, U(1))$ に属する。こうして SPT 相は $H^{d+1}(G, U(1))$ で分類されることがわかった。

■anit-unitary を含む場合　最後に anti-unitary を対称性に含める場合を考える。(1.8) をやや修正して一般化すれば、上の議論がほとんど使える。(1.8) の代わりに

$$U(g) = N(g)S(g)K^{n(g)}$$

とする。ここに K は複素共役、$n(g)$ は G の元 g を $\{0,1\}$ に飛ばし、g がユニタリならば 0、anti-unitary ならば 1 を返す。G の汎函数への作用を $g\mathcal{F}[\alpha] = (-1)^{n(g)}\mathcal{F}[g^{-1}\alpha]$ とすると、上記の議論がほとんどそのまま使える。ただし G の anti-unitary な元が U(1) に複素共役の作用を引き起こす。これを踏まえ分類は $H^{d+1}(G, U(1))$ で行われ、この $U(1)$ は anti-unitary な元が複素共役で作用する non-trivial G-module になる。

2　Non-Linear Sigma Model

SO(3) の (2+1)D nontrivial SPT は continuous nonlinear σ model (NLσM) で記述される。[CGLW13]

■考える action　時空 $D = d + 1$ 次元多様体上で定義された $D + 1$ 成分単位ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ の NLσM の Euclidean action は

$$S^{\mathrm{bulk}} = S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{dyn}} + S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}}$$

$$S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{dyn}} = \frac{1}{g}\int d^D x\, \partial_\mu \boldsymbol{n} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{n} \tag{2.1}$$

$$S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}} = i\Theta\frac{}{V_D}\int \boldsymbol{n}^*(\omega_V) \tag{2.2}$$

である。ここに V_D は unit D-sphere の体積、ω_V は unit D-sphere 上の volume form、$\boldsymbol{n}^*(\omega_V)$ はその $\boldsymbol{n} : \mathbb{R}^D \to S^D$ による引き戻しである。theta term は $\pi_D(S^D) \cong \mathbb{Z}$ に値を取る"generalized winding number"を detect し、これは topological 不変量である。時空に boundary がない場合は $S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}}$ は $i\Theta$ の整数倍になる。そこで Θ を 2π の整数倍に取ることで bulk で自明な SPT 相になっていることを要請する。[*4] 系のトポロジカルな性質は $S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}}$ によって記述されるため、以下の議論では $S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{dyn}}$ は不要である。

$S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}}$ は bulk でこそ contribution を与えないが、空間の edge では非自明な寄与をもたらす。この場合、$S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}}$ は edge における $\boldsymbol{n}$ にのみ依存し、boundary における action は Wess-Zumino-Witten (WZW) action S_{WZW} で記述される。そのため gapped bulk の自由度を intergate out して boundary における低エネルギー有効理論

$$\exp\bigl(-S^{\mathrm{edge}}\bigr) = \exp\Bigl(-S^{\mathrm{edge}}_{\mathrm{dyn}} - S_{\mathrm{WZW}}\Bigr)$$

が書ける。ここに $S^{\mathrm{edge}}_{\mathrm{dyn}}$ は $S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{dyn}}$ から生じたもので、あまり重要ではない。

■WZW action の変換性　対称性 G の bulk への作用 $\boldsymbol{n} \to g\boldsymbol{n}$ を考える。

*4 この要請により $S^{\mathrm{bulk}}_{\mathrm{topo}}$ は分配関数 $\int \mathcal{D}[\boldsymbol{n}]e^{-S}$ に contribution を与えない。

Assumps. 3

- S_{topo}, $S^{\text{bulk}}_{\text{dyn}}$ はともに対称性で local に不変、すなわち (2.1), (2.2) は被積分関数が g によらない
- $S^{\text{edge}}_{\text{dyn}}$ も local に不変
- 量子化した後 Hilbert space は各時刻で $\boldsymbol{n}$ の配位によりラベルされた基底で張られる

S_{WZW} は global には (mod 2π で) 不変だが、一般に local には不変とは限らない。[*5]

この S_{WZW} の local な変換性によって、対称性の表現が non-on-site になることを示す。虚時間発展を

$$\langle \boldsymbol{n}'| e^{-\beta H} |\boldsymbol{n}\rangle = \int \mathcal{D}[\boldsymbol{n}(\tau)] e^{-S^{\text{edge}}0,\beta}$$

w/

$$S^{\text{edge}}\{0,\beta\}[\boldsymbol{n}] := \int \mathrm{d}^{D-2}x \int_0^\beta d\tau (\mathcal{L}^{\text{edge}}_{\text{dyn}}[\boldsymbol{n}(\tau)] + \mathcal{L}_{\text{WZW}}[\boldsymbol{n}(\tau)])$$

$$\boldsymbol{n}(0) = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}(\beta) = \boldsymbol{n}'$$

で計算できる。作用を評価する多様体は $\tau = 0, \beta$ に boundary を持つ時空である。boundary がある多様体の上では S_{WZW} は

$$S_{\text{WZW}}\{0;\beta\} \to gS_{\text{WZW}}\{0;\beta\}$$

と変換する。変換前後の差は時間の boundary に押し付けられるはずなので、

$$gS_{\text{WZW}}\{0;\beta\} - S_{\text{WZW}}\{0;\beta\} = i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}(\beta)] - i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}(0)] \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

この関係から、edge Hamiltonian は naive な on-site の変換 $S(g) = \int \mathcal{D}[\boldsymbol{n}] |g\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{n}|$ で不変とならないことがわかる。実際、

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{n}'| S(g)^\dagger e^{-\beta H} S(g) |\boldsymbol{n}\rangle &= \langle g\boldsymbol{n}'| e^{-\beta H} |g\boldsymbol{n}\rangle \\
&= \int \mathcal{D}[\boldsymbol{n}(\tau)] e^{-S^{\text{edge}}\{0,\beta\}[g^{-1}\boldsymbol{n}]} \\
&= \int \mathcal{D}[\boldsymbol{n}(\tau)] e^{-S^{\text{edge}}\{0,\beta\}[\boldsymbol{n}]} e^{i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}(\beta)] - i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}(0)]} \\
&= e^{i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}'] - i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}]} \langle \boldsymbol{n}'| e^{-\beta H} |\boldsymbol{n}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{n}'| N(g) e^{-\beta H} N(g)^\dagger |\boldsymbol{n}\rangle
\end{aligned}$$

w/

$$N(g) := \int \mathcal{D}[\boldsymbol{n}] e^{i\mathcal{N}(g)[\boldsymbol{n}]} |\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{n}|.$$

ゆえに Hamiltonian と可換な対称性の表現は $U(g) = N(g)S(g)$ であることがわかった。$N(g)$ が on-site である保証はどこにもないが、のちに見るように local でなければならない。これはまさしく Sec. 1.3 の仮定に一致する。

■ati-unitary を含む場合　対称性に anti-unitary な操作が含まれる場合も straightforwad に議論できる。action への作用を $\boldsymbol{n} \to g\boldsymbol{n}$, $i \to (-1)^{n(g)} i$, $U(g) = N(g)S(g)K^{n(g)}$ とする。

[*5] S_{WZW} は canonical な構成法が存在しないため。

2.1 Calculating tge cocycle in nonlinear sigma models using U(1) cochains on the target manifold

NLσM の cocycle を計算するには、theta term を target manifold $T = S^D$ 上の U(1) cochain として解釈するのが良い。

Def. 2: coboundary operator for cochains

任意の k-cochain ω と $k+1$-chain A の間に

$$(d\omega)(A) = \omega(\partial A)$$

を与える d を coboundary operator という。
また k-cochain ω がある $k-1$-cochain κ を用いて $\omega = d\kappa$ と書ける時、ω は exact であるという。

Lem. 4

T 上 U(1) k-cochain ω が exact であるための必要十分条件は、境界のない任意の closed $k+1$-chain C に対して $\omega(C) = 0$ であることである。

Prf.

closed C にて $\omega(C) = 0$ となる条件は、F_ω が任意の closed M 上で 0 になることと同値である。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\boldsymbol{n}"] \arrow[d, "F_\omega"'] & \boldsymbol{n}(M) \in T = S^D \arrow[dl, "\omega"] \\ U(1) & \end{tikzcd}$$

これが成立するなら、境界付き時空 M では $F_\omega[\boldsymbol{n}]$ は ∂M における $\boldsymbol{n}$ の値にのみ依存すると期待できる。実際 ω が exact で $\omega = \mathrm{d}\kappa$ と書けるなら、

$$F_\omega[\boldsymbol{n}] = \omega(\boldsymbol{n}(M)) = (\mathrm{d}\kappa)(\boldsymbol{n}(M)) = \kappa(\boldsymbol{n}(\partial M)) = F_\kappa[\boldsymbol{n}(\partial M)]$$

とかける。以上の考察から、theta term から edge symmetry を導き出し、さらに edge symmetry から cocycle を出すには、target manifold 上で定義された U(1) cochains ω, κ, etc. を調べればいいことがわかる。

付録 A Explicit construction of the edge theory

by definition で、SPT の基底状態は gapped かつ not topologically ordered. すなわち直積状態に local unitary で繋げることができる。境界のない bulk の基底状態 $|\Psi_{\mathrm{gr}}\rangle$ を直積状態 $|\phi\rangle^{\otimes N}$ に移す local unitary を $\mathcal{D}$ とし、境界付き領域への $\mathcal{D}$ の制限を $\tilde{\mathcal{D}}$ とする。boundary 付きの任意の低エネルギー状態 $|\Psi\rangle$ は、boundary から十分遠くで $|\Psi_{\mathrm{gr}}\rangle$ と一致しているはず。すなわち $\tilde{\mathcal{D}}\,|\Psi\rangle$ は boundary の遠くで $|\phi\rangle^{\otimes N}$ に一致する。ゆえに、$\tilde{\mathcal{D}}\,|\Psi\rangle$ は boundary 近傍の帯状領域 B にて状態 $|\Psi\rangle$ をとり、それ以外の領域 B^c では $|\phi\rangle$ の直積 $|\Phi\rangle_{B^c}$ をとる直積状態である。

$$\tilde{\mathcal{D}}\,|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_B \otimes |\Phi\rangle_{B^c} \tag{付録 A.1}$$

よって $\{|\Psi\rangle_B : |\Psi\rangle$ a low-energy boundary state$\}$ は $(d-1)$ 次元の boundary theory を構成する。

bulk の基底状態が対称性の on-site representation $U(g)$ で不変であるとする。$\mathcal{D}$ はこの対称性と関係がついていないので、どのように作用するか非自明。しかし「boundary 以外では $\mathcal{D}$ と $U(g)$ は可換」という仮定を置くと作業が簡単になる。cohomological classification で SPT 相を分類する [CGLW13] とき、この仮定は常に満たされる。

この仮定のもとで、boundary にて対称性の表現を explicit にかける。

1. **boundary つき領域への制限 $\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{U}$ の交換関係**　boundary がないときに $[U(g), \mathcal{D}] = 0$ なので boundary があるときは up to boundary terms で制限 $\tilde{U}(g), \tilde{\mathcal{D}}$ が可換。したがって $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{U}(g)\tilde{\mathcal{D}}^\dagger = W_B(g)U_{B^c}(g)$, where $W_B(g)$ は boundary 近傍 B にのみ作用し、$U_{B^c}(g)$ は $U(g)$ の B^c への制限。
2. **変換が $W_B(g)$ のみに押し付けられること**　$\tilde{D}(\tilde{U}(g)\,|\Psi\rangle) = (W_B(g)\,|\Psi\rangle_B)\otimes|\Phi\rangle_{B^c}$ と書ける。*6 (付録 A.1) と比較すれば、W_B は boundary における対称性の表現になっている。

参考文献

[CGLW13] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, and Xiao-Gang Wen, *Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group*, Phys. Rev. B **87** (2013), no. 15, 155114.

[EN14] Dominic V. Else and Chetan Nayak, *Classifying symmetry-protected topological phases through the anomalous action of the symmetry on the edge*, Physical Review B **90** (2014), no. 23, 235137.

*6 $|\Phi\rangle_{B^c}$ が $U_{B^c}(g)$ のもとで不変なので、

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{U}(g)\,|\Psi\rangle) &= \tilde{\mathcal{D}}\tilde{U}(g)\tilde{\mathcal{D}}^\dagger\tilde{\mathcal{D}}\,|\Psi\rangle \\
&= W_B(g)U_{B^c}(g)(|\Psi\rangle_B \otimes |\Phi\rangle_{B^c}) \\
&= (W_B(g)\,|\Psi\rangle_B) \otimes (U_{B^c}(g)\,|\Phi\rangle_{B^c}) \\
&= (W_B(g)\,|\Psi\rangle_B) \otimes |\Phi\rangle_{B^c}
\end{aligned}$$