Fannes, Nachtergaele, Werner による MPS の構成 個人メモ

齊藤巧磨

2026 年 4 月 24 日

修論に載せようとしていたが、使わなかったので、個人メモとして残しておく。

—

本章は [FNW92b] に基づいている。

本章では一般に無限体積の 1 次元量子スピン系を扱う。単一スピンの測定可能状態は単位元 $1_{\mathscr{A}}$ を持つ C^*-代数 $\mathscr{A}$ であり、$\mathscr{A}$ は有限次元とすることがほとんどである。$\mathbb{Z}$ を格子系として、その部分集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ の代数を $\mathscr{A}_\Lambda := \bigotimes_{x\in\Lambda} \mathscr{A}$ と定める。[*1] $\Lambda' \subset \Lambda''$ の埋め込みに対して $\mathscr{A}_{\Lambda'} \hookrightarrow \mathscr{A}_{\Lambda''}$ の埋め込みが $A \mapsto A \otimes \bigotimes_{x\in\Lambda''\setminus\Lambda'} 1_{\mathscr{A}}$ で与えられる。

$\mathscr{A}_\mathbb{Z}$ には $\mathbb{Z}$ による作用として並進変換 α_r が定義される: $\alpha_r \mid_{\mathscr{A}_\Lambda} : \mathscr{A}_\Lambda \to \mathscr{A}_{\Lambda+r}$. この作用にて不変な状態の集合を $\mathscr{T}$ で表す。

1 有限相関長状態

[*1] 構成には無限系特有の注意点があるが、本稿では議論しない。

Prop. 1: 有限相関長状態の定義

$\mathscr{A}$ を単位元を有する C^*-代数、ω を $\mathscr{A}_\mathbb{Z}$ 上の並進不変状態とする。このとき以下は等価。

1. $\{\Phi : \mathscr{A}_\mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \Phi(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \omega(X \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_n), X \in \mathscr{A}_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}}\}$ は $\mathscr{A}_\mathbb{N}^*$ の有限次元線形部分空間。
2. 有限次元線形空間 $\mathscr{B}$, 線型写像 $\boldsymbol{E} : A \in \mathscr{A} \mapsto \boldsymbol{E}_A \in \mathcal{L}(\mathscr{B}, \mathscr{B})$, $e \in \mathscr{B}$, 線型汎関数 $\rho \in \mathscr{B}^*$ が存在して、
   - $\rho \circ \boldsymbol{E}_{1_\mathscr{A}} = \rho$
   - $\boldsymbol{E}_{1_\mathscr{A}}(e) = e$
   - $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathscr{A}_{\{i\}} \cong \mathscr{A}$ に対し、

$$\omega(A_n \otimes \cdots \otimes A_{n+m}) = \rho(e)^{-1} \rho \circ \boldsymbol{E}_{A_n} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_{n+m}}(e)$$

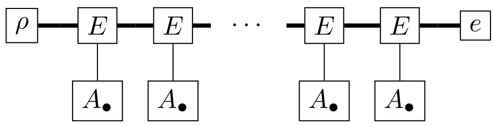
item 2 の $\mathscr{B}$ として

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_{A_1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_n}(e) \mid n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}\} = \mathscr{B}$$
$$\mathrm{span}\{\rho \circ \boldsymbol{E}_{A_1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}\} = \mathscr{B}^*$$

ととるならば $\mathscr{B}, \boldsymbol{E}, e, \rho$ は ω から線形同型を除いて一意に定まる。このような ω を有限相関長状態 (finitely correlated state) という。

図式的には

$$\rho \circ \boldsymbol{E}_{A_n} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_{n+m}}(e) =$$



と表せる。太線で表した $\mathscr{B}$ の次元が有限になる。縦線の下側が観測可能量を表し、上側が状態 ω である。

Prf.

■item 1 $\Longrightarrow$ item 2　$\mathscr{A}_\sharp := \mathscr{A}_\mathbb{N}$, $\mathscr{A}_\flat := \mathscr{A}_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}}$ とする。$\mathscr{A}_\sharp$ に同値関係

$$X \sim Y \iff \forall X_\flat \in \mathscr{A}_\flat, \quad \omega(X_\flat \otimes (X - Y)) = 0$$

を定め、商空間 $\mathscr{B}_\sharp := \mathscr{A}_\sharp / \sim$ を考える。$\mathscr{B}_\flat$ も同様に定義する。非退化な双線形形式 $\eta : \mathscr{B}_\flat \times \mathscr{B}_\sharp \to \mathbb{C}$ を $\eta([X_\flat]_\flat, [X_\sharp]_\sharp) := \omega(X_\flat \otimes X_\sharp)$ で定めると well-defined. $X_\flat \sim X'_\flat$ ならば二つは ω を通して $\mathscr{A}_\sharp \to \mathbb{C}$ を与える同一な線型汎函数なので、item 1 より $\dim \mathscr{B}_\flat < \infty$. η が非退化なので $\mathscr{B}_\sharp = \mathscr{B}_\flat^*$ である。$\mathscr{B} = \mathscr{B}_\sharp$, $e = [1_{\mathscr{A}_\sharp}]_\sharp \in \mathscr{B}$, $\rho = [1_{\mathscr{A}_\flat}]_\flat \in \mathscr{B}_\flat = \mathscr{B}^*$ と定める。$\boldsymbol{E}_A([X_\sharp]_\sharp) = [A \otimes X_\sharp]_\sharp$ とする。$[X_\sharp]_\sharp = 0 \in \mathscr{B}_\sharp$ のとき、任意の $X_\flat \in \mathscr{A}_\flat$ に対し

$$\omega((X_\flat \otimes A) \otimes X_\sharp) = \eta([X_\flat \otimes A]_\flat, 0) = 0$$

であり、並進不変性から $\omega(X_\flat \otimes (A \otimes X_\sharp)) = 0$ となるため $[A \otimes X_\sharp]_\sharp = 0$. よって $\boldsymbol{E}_A$ は well-defined. このとき

$$\begin{aligned}\rho \circ \boldsymbol{E}_{1_\mathscr{A}}([X_\sharp]_\sharp) &= \rho([1_\mathscr{A} \otimes X_\sharp]_\sharp) = \eta([1_{\mathscr{A}_\flat}]_\flat, [1_\mathscr{A} \otimes X_\sharp]_\sharp) \\ &= \omega(1_{\mathscr{A}_\flat} \otimes (1_\mathscr{A} \otimes X_\sharp)) = \omega(1_{\mathscr{A}_\flat} \otimes X_\sharp) = \rho([X_\sharp])\end{aligned}$$

より $\rho \circ \boldsymbol{E}_{1_{\mathscr{A}}} = \rho$. 任意の $X_\flat \in \mathcal{A}_\flat$ に対し

$$\eta([X_\flat], \boldsymbol{E}_{1_{\mathscr{A}}}(e)) = \omega(X_\flat \otimes (1_{\mathscr{A}} \otimes 1_{\mathscr{A}_\sharp})) = \omega(X_\flat \otimes 1_{\mathscr{A}_\sharp}) = \eta([X_\flat], e)$$

なので $\boldsymbol{E}_{1_{\mathscr{A}}}(e) = e$. 任意の $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{A}_{\{i\}}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\rho(e)^{-1}\rho \circ \boldsymbol{E}_{A_n} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_{n+m}}(e) \\
&= \eta([1_{\mathscr{A}_\flat}]_\flat, [1_{\mathscr{A}_\sharp}]_\sharp)^{-1}\eta([1_{\mathscr{A}_\flat}]_\flat, [A_n \otimes \cdots \otimes A_{n+m} \otimes 1_{\mathscr{A}_\sharp}]_\sharp) \\
&= \omega(1_{\mathscr{A}_\flat} \otimes 1_{\mathscr{A}_\sharp})^{-1}\omega(1_{\mathscr{A}_\flat} \otimes (A_n \otimes \cdots \otimes A_{n+m} \otimes 1_{\mathscr{A}_\sharp})) \\
&= \omega(A_n \otimes \cdots \otimes A_{n+m})
\end{aligned}$$

となるので、item 2 が全て成り立つ。

■item 2 $\Longrightarrow$ item 1　item 2 を満たす $(\mathscr{B}, \boldsymbol{E}, e, \rho)$ から、写像 $\mathscr{T}_\sharp : \mathscr{A}_\sharp \to \mathscr{B}$, $\mathscr{T}_\flat : \mathscr{A}_\flat \to \mathscr{B}^*$ を

$$\mathscr{T}_\sharp(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \boldsymbol{E}_{A_1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_n}(e)$$

$$\mathscr{T}_\flat(A_{-n} \otimes \cdots \otimes A_0) = \rho(e)^{-1}\rho \circ \boldsymbol{E}_{A_{-n}} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_0}$$

で定義する。$X_\flat \in \mathscr{A}_\flat, X_\sharp \in \mathscr{A}_\sharp$ に対し $\omega(X_\flat \otimes X_\sharp) = \mathscr{T}_\flat(X_\flat)(\mathscr{T}_\sharp(X_\sharp))$ となる。$\mathscr{T}_\flat \in \mathscr{B}^*$ は有限次元ベクトル空間の元なので、item 1 が成り立つ。主張の意味で minimal に $\mathscr{B}^*$ を取れば $\mathscr{T}_\flat$ は全射なので $\mathscr{T}_\sharp(X_\sharp) = 0$ と $\forall X_\flat, \omega(X_\flat \otimes X_\sharp) = 0$ は同値。すなわち $X_\sharp \sim 0$ である。$\mathscr{T}_\sharp$ も全射なので $[X_\sharp]_\sharp \mapsto \mathscr{T}_\sharp(X_\sharp)$ は $\mathscr{B}_\sharp \to \mathscr{B}$ の線形同型である。

有限相関長状態は Prop. 1 item 2 の条件から $\omega(\mathbb{1}) = \rho \circ \boldsymbol{E}_{\mathbb{1}} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{\mathbb{1}}(e)/\rho(e) = 1$ を満たすので、規格化されている。しかしこの定義ではが positive, すなわち正定値な観測可能量を正の値に写すとは限らず、ω が状態であることを保証しない。ω が positive であることの必要十分条件を与えるためにベクトル空間に行列順序を導入する。

Def. 1: 複素ベクトル空間の順序

複素ベクトル空間 $\mathscr{B}$ の部分集合 $\mathscr{B}_+ \subset \mathscr{B}_h = \{B \in \mathscr{B} \mid B = B^\dagger\}$ が

- 和と正の実数倍で閉じる
- $\mathscr{B}_+ \cap (-\mathscr{B}_+) = \{0\}$
- $\mathscr{B}_+$ はベクトル空間として $\mathscr{B}$ を生成する

を満たすとき、$B \geq 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathscr{B}_+$ と定める。$A \leq B$ を $B - A \geq 0$ と定める。
また、任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\mathscr{B}$ 値行列空間 $\mathrm{Mat}_n(\mathscr{B})$ に上記の意味で順序が入っていて、さらに任意の $m, n \in \mathbb{N}$ と $V \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ により $V^\dagger \mathrm{Mat}_m(\mathscr{B})_+ V \subset \mathrm{Mat}_n(\mathscr{B})_+$ が成り立つとき、$\mathscr{B}$ は**行列順序付き空間** (matrix ordered space) と呼ぶ

半正定値、正写像、CP 写像も複素数値行列の場合と同様に定める。
この定義をもとに、以下の命題を与える。

Prop. 2: 有限相関長状態の positivity 条件

$\mathscr{A}$ を有限次元 C^*-代数、$\mathscr{B}$ を有限次元の行列順序つき空間とする。$e \in \mathscr{B}$ は半正定値、$\rho \in \mathscr{B}^*$ は正写像とする。$\boldsymbol{E} : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ が

$$\boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes e) = e, \qquad \rho(\boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes B)) = \rho(B), \qquad B \in \mathscr{B}$$

を満たす CP 写像であるとする。このとき、$\boldsymbol{E}_A(B) = \boldsymbol{E}(A \otimes B)$, $\mathscr{B}$, e, ρ は有限相関長状態 ω を生成し、また全ての有限相関長状態はこのように表される。

$\boldsymbol{E}$ が CP であることから ω が positive になるのは、再起的に

$$\boldsymbol{E}^{(n+1)} = \boldsymbol{E} \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{A}} \otimes \boldsymbol{E}^{(n)}) : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}^{\otimes n} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}$$

を定義したときこれが CP であることから、

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \mapsto \omega(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = \rho(\boldsymbol{E}^{(n)}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \otimes e))/\rho(e)$$

が正写像になることが従うためである。

Def. 2: C^*-有限相関長状態

$\mathscr{A}$ を単位元を有する (有限次元とは限らない) C^*-代数とする。有限相関長状態の positivity 条件 (Prop. 2) が満たされ $\mathscr{B}$ が行列順序付き C^*-代数であるとき、ω を $(\boldsymbol{E}, \rho, e)$ により生成される **C^*-有限相関長状態** (C^*-finitely correlated state) という。$\mathscr{A}_{\mathbb{Z}}$ 上の全ての C^*-有限相関長状態の集合を $\mathscr{F}$ または $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ で表す。

Lem. 3: C^*-有限相関長状態の標準形

任意の C^*-有限相関長状態 ω は、

- $e = 1_{\mathscr{B}}$
- ρ は $\mathscr{B}$ 上忠実 (i.e. $\rho(B^\dagger B) = 0 \implies B = 0$) な状態

を満たす $(\boldsymbol{E}, \rho, e)$ により生成される。また $\mathscr{B}$ は

- 任意の $\boldsymbol{E}_A$ で不変かつ $1_{\mathscr{B}}$ を有する真部分代数が存在しない
- full な行列代数 $\mathscr{B} = \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$

のいずれかになるように minimal にとれる。

Prf.

ある $B \in \mathscr{B}$ によって $0 \le B \le \lambda e$ なる λ が存在するとき、$0 \le A \in \mathscr{A}$ とともに

$$0 \le \boldsymbol{E}(A \otimes B) \le \|A\| \boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes B) \le \lambda \|A\| \boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes e) = \lambda \|A\| e$$

となる。よって e の射影空間による部分代数 $\tilde{\mathscr{B}} = e\mathscr{B}e$ は任意の $\boldsymbol{E}_A$ で不変なので $\boldsymbol{E}$ を $\mathscr{A} \otimes \tilde{\mathscr{B}} \to \tilde{\mathscr{B}}$ に制限しても ω を生成する。このとき e は ω を生成する $\tilde{\mathscr{B}}$ で可逆。また、ω は

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(A \otimes B) = e^{-1/2} \boldsymbol{E}(A \otimes e^{1/2} B e^{1/2}) e^{-1/2}$$

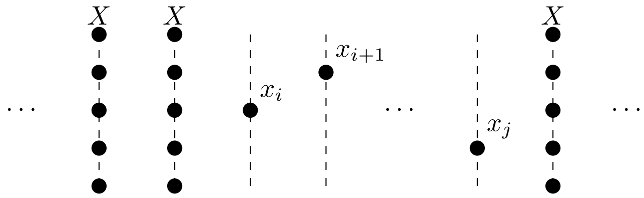


図 1: シリンダー集合 $Z(x_i, \dots, x_j)$

$$\tilde{\rho}(B) = \rho(e^{1/2} B e^{1/2})$$

によっても生成される。これは $\tilde{\boldsymbol{E}}(1_{\tilde{\mathscr{B}}}) = 1_{\tilde{\mathscr{B}}}$, $\tilde{\rho} \circ \tilde{\boldsymbol{E}}_{1_{\mathscr{A}}} = \rho$ なので、$e = 1_{\tilde{\mathscr{B}}}$ として良い。
$\rho \not> 0$ すなわち $s := \mathrm{supp}(\rho) < 1_{\mathscr{B}}$ を仮定し、$\mathscr{B}$ 上の演算子 $P : B \mapsto sBs$ を定義する。$\rho' = \rho \circ \boldsymbol{E}_{A_1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_n} \in \mathscr{B}^*$ は ρ により dominated なので $\rho' \circ P = \rho'$??????????. よって ω は $\tilde{\mathscr{B}} = s\mathscr{B}s \subset \mathscr{B}$ と $1_{\tilde{\mathscr{B}}} = P1_{\mathscr{B}} = s$, $\tilde{\rho} = \rho(1_{\mathscr{B}})^{-1} \cdot \rho|_{\tilde{\mathscr{B}}}$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_A = P \circ E_A|_{\tilde{\mathscr{B}}}$ によっても生成される。
$\mathscr{B} = \bigoplus_\alpha \mathrm{Mat}_{k_\alpha}(\mathbb{C})$ と分解したとき $\mathbb{C}^k = \bigoplus_\alpha \mathbb{C}^{k_\alpha}$ の上に表現をとれる。P_α を射影、$\boldsymbol{P} : \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C}) \to \mathscr{B}; B \mapsto \sum_\alpha P_\alpha B P_\alpha$ とすると、$\tilde{\boldsymbol{E}} := \boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{E} \circ (1_{\mathscr{A}} \otimes \boldsymbol{P}) : \mathscr{A} \otimes \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ は同じ状態 ω を生成する。このような $\mathscr{B}$ が minimal である。

2 dilation theory と purely generated states

$(\boldsymbol{E}, \rho, 1_{\mathscr{B}})$ により生成される C^*-有限相関長状態を考察する。各サイトに配置する $\boldsymbol{E}$ は CP 写像 $\boldsymbol{E}_x : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ の有限和 $\boldsymbol{E} = \sum_{x \in X} \boldsymbol{E}_x$ と分解できるとする。$\boldsymbol{E}_{x,A}(B) := \boldsymbol{E}_x(A \otimes B)$ と定めると、$i < j \in \mathbb{Z}$ と $x_i, \dots, x_j \in X$ に対し正線型写像 $\omega_{i,j}[x_i, \dots, x_j]$ を、任意の $n, m > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
&\omega_{i,j}[x_i, \dots, x_j]((A_{i-n} \otimes \cdots \otimes A_{i-1}) \otimes (A_i \otimes \cdots \otimes A_j) \otimes (A_{j+1} \otimes \cdots \otimes A_{j+m})) \\
&= \rho \circ (\boldsymbol{E}_{A_{i-n}} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_{i-1}}) \circ (\boldsymbol{E}_{x_i, A_i} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{x_j, A_j}) \circ (\boldsymbol{E}_{A_{j+1}} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_{j+m}})(1_{\mathscr{B}})
\end{aligned}$$

を満たすように定める。これは、i 番目から j 番目のサイトは特定の選ばれた $x_i, \dots, x_j$ をとり、それ以外のサイトは全ての可能な configuration で和をとることで得られる。一般に、無限長の列 $\xi \in X^{\mathbb{Z}}$ のうち有限個の座標が特定の値に固定されているような列全体の集合を**シリンダー集合** (cylinder set) という (cf. Fig. 1)。あきらかに

$$\sum_{x_i, \dots, x_j \in X} \omega_{i,j}[x_i, \dots, x_j] = \omega$$

である。規格化因子は状態空間 X における「離散時刻」$\mathbb{Z}$ にわたる過程の"paths"の集合 $X^{\mathbb{Z}}$ でシリンダー測度 $\boldsymbol{P}$ を与える。すなわち、

$$Z(x_i, \dots, x_j) := \{\xi \in X^{\mathbb{Z}} \mid \xi_t = x_t \text{ for } t = i, \dots, j\}$$

によって

$$\omega_{i,j}[x_i, \dots, x_j](1) = \boldsymbol{P}(Z(x_i, \dots, x_j)).$$

インターバル $\{i,\ldots,j\}$ を増やしていくと状態 ω のより細かい分解を得る。lifting の理論により path $\xi \in X^{\mathbb{Z}}$ それぞれに対して $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ 上の状態 $\Omega[\xi]$ として、$\xi \mapsto \Omega[\xi]$ が各 $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ についてシリンダー可測かつ

$$\omega_{i,j}[x_i,\ldots,x_j](A) = \int_{\xi \in Z(x_i,\ldots,x_j)} \boldsymbol{P}(\mathrm{d}\xi)\Omega[\xi](A)$$

を満たすように取れる。特に、$\omega = \int \boldsymbol{P}(\mathrm{d}\xi)\Omega[\xi]$ である。

この構成法を使うことで、もとの系だけでなく、分解 (過程) $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ごとの観測可能量を導入することができる。まず X 上の関数の集合 $\mathcal{C}(X)$ を用いることで各サイトの代数 $\mathscr{A}$ の代わりに $\tilde{\mathscr{A}} := \mathscr{A} \otimes \mathcal{C}(X)$ を定義する。$\tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{Z}}$ 上の C^*-有限相関長状態 $\tilde{\omega}$ は CP 写像

$$\tilde{\boldsymbol{E}} : \tilde{\mathscr{A}} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}; \quad (A \otimes f) \otimes B \mapsto \sum_{x\in X} f(x)\boldsymbol{E}_x(A \otimes B)$$

と ρ によって生成される。$\tilde{\mathscr{A}}_{\mathbb{Z}} = (\mathscr{A} \otimes \mathcal{C}(X))_{\mathbb{Z}} \cong \mathscr{A}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{C}(X^{\mathbb{Z}})$ であるから、$\tilde{\omega}$ を $\mathcal{C}(X^{\mathbb{Z}})$ に制限すると $X^{\mathbb{Z}}$ 上で確率測度 $\boldsymbol{P}$ が定義できる。ω の integral decomposition は、コンパクト集合 $\hat{X}$ により $\hat{\mathscr{A}} \otimes \mathcal{C}(\hat{X})$ と表されるような、C^*-代数上で定義された状態の integral decomposition とできる。

この構成をより精密に定式化する。まずは $\boldsymbol{E} = \sum_{x\in X} \boldsymbol{E}_x$ の分解ができない状況を定義する。

Def. 3: 純粋な CP 写像・純粋に生成される状態

CP 写像が自身に比例しない二つの CP 写像の和で書けないとき、純粋 (pure) であるという。$\mathscr{A}_{\mathbb{Z}}$ 上の C^*-有限相関長状態 ω が純粋な写像 $\boldsymbol{E}$ により生成されるとき、ω を**純粋に生成される状態** (purely generated state) という。

通常の意味での純粋状態は純粋に生成された状態である。

Prop. 4

$\mathscr{A}$ を有限次元 C^*-代数とし、ω を $\boldsymbol{E} : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ と ρ により生成される状態とする。ρ と 1 サイトに制限した ω はともに $\mathscr{A}$ 上で忠実であるとする。このとき以下が成立。

1. ω が純粋に生成される $\iff$ $d, k \in \mathbb{N}$ が存在して、$\mathscr{A} \cong \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$, $\mathscr{B} \cong \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ であり、$\boldsymbol{E}(A \otimes B) = V^\dagger(A \otimes B)V$ となるような isometry $V : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^k$ が存在する。
2. $\mathscr{B} = \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$ なら、有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の忠実表現 $\pi : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ および以下を満たす純粋な CP 写像 $\tilde{\boldsymbol{E}} : \mathbb{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ により $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上に生成される状態 $\tilde{\omega}$ が存在する。
   - $\tilde{\boldsymbol{E}}(1_{\mathscr{A}} \otimes B) = \boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes B)\ \forall B \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$
   - $\omega(A_i \otimes \cdots \otimes A_{i+n}) = \tilde{\omega}(\pi(A_i) \otimes \cdots \otimes \pi(A_{i+n}))$

Prf.

有限次元 C^*-代数は行列環の直話に分解でき、直和間の CP 写像 $T : \bigoplus_i \mathscr{A}_i \to \bigoplus_j \mathscr{B}_j$ は自然な分解 $T_{ij} : \mathscr{A}_i \to \mathscr{B}_j$ がある。single summand 間の写像 $\mathscr{A}_i \to \mathscr{B}_j$ は純粋である。一方で単一サイトに制限した ω が忠実という仮定から、$\boldsymbol{E}$ が純粋で $\mathscr{A}$ も $\mathscr{B}$ も規約な行列代数。このため $\mathscr{B} \cong \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ と仮定して良い。

$\boldsymbol{E}$ の Steinspring dilation を考察する。これにより Hilbert 空間 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の表現 $\tilde{\pi}:\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\to\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ と isometry $V:\mathbb{C}^k\to\tilde{\mathcal{H}}$ が存在して、任意の $X\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ について $\boldsymbol{E}(X)=V^\dagger\tilde{\pi}(X)V$ となる。$\tilde{\pi}(1_{\mathscr{A}}\otimes B)$ は $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ に値を取る $k\times k$ 行列のコピーなので、$\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^k$ と分解できてホンマか??????????、$\tilde{\pi}(1_{\mathcal{A}}\otimes B)=1_{\mathcal{H}}\otimes B$ となる。$\tilde{\pi}(\mathscr{A}\otimes 1_{\mathscr{B}})$ が $1_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$ と可換であることから、表現 $\pi:\mathscr{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ であって $\tilde{\pi}(A\otimes 1_{\mathscr{B}})=\pi(A)\otimes 1_{\mathbb{C}^k}$ を満たすものが存在する。why??????????
CP 写像の分解 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$ が $\tilde{\pi}$ の commutant の positive element (すなわち $[E,\pi(\mathscr{A})]=\{0\}$ を満たす $E_1\otimes 1$) と 1:1 対応することは Steinspring dilation の basic property である。そうなん??????????? この対応は $\boldsymbol{E}_1(A\otimes B)=V^\dagger(E\otimes 1)(\pi(A)\otimes B)V$ によって与えられる。よって $\boldsymbol{E}$ が純粋 $\iff$ π が既約 $\iff$ $\mathcal{H}\cong\mathbb{C}^d$ かつ π が identity representation.why?????????? これにより (1) が示された。(2) は dilation から得られる object と、そいつらが $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathbb{Z}}$ 上に生成する C^*-有限相関長状態を straightforward に構成することで示される。NOT CHECKED YET!!!!!!!!!

先ほど新たに追加した変数 $x\in X$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中の $\pi(\mathscr{A})$ との commutant である。why?????????? この代数は非可換であり、可換代数 $\mathcal{C}(X)$ による全ての可能な拡張を同時に含んでいる。why?????????? このため純粋に生成された状態 $\tilde{\omega}$ を ω の **dilation** と呼ぶのが相応しい。ただし、$\tilde{\omega}$ の uniqueness は確認していない。π は忠実としているので $\mathscr{A}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分代数とみなせる。よって任意の C^*-有限相関長状態は純粋に生成された状態を 1 サイト代数の部分代数に制限することで得られる。why?????????? 古典確率過程において忠実な純同型 $\pi:\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(Y)$ は全射 $\pi_*:X\to Y$ を $\pi f(x)=f(\pi_*x)$ で定めた。そうなん?????????? よって変数 $y\in Y$ は X の関数である。このアナロジーを今回にも適用すると、上記の命題は「任意の C^*-有限相関長状態は、純粋に生成された C^*-有限相関長状態の"local function"」という解釈ができる。

以下、気持ちの話。論文の Prop. 3.1 (3) は ω の ergodicity が $\hat{\boldsymbol{E}}$ にのみ依存することを示している。ω が ergodic なら $\tilde{\omega}$ も ergodic になる。同様に ω で並進対称性が破れていなければ (i.e. primitive すなわち $\hat{\boldsymbol{E}}$ の peripheral spectrum が単位元のみ)、$\tilde{\omega}$ も並進対称性を持つ。よって、論文中の Cor. 3.4 を適用してまずは C^*-有限相関長状態を unique extremal periodic component に分解する。こうすると $\hat{\boldsymbol{E}}^n\to\hat{\boldsymbol{E}}^\infty:B\mapsto\rho(B)1_{\mathscr{B}}$ へ指数的に収束する。続いて Prop. 4 (1) を適用して、各成分を purely generated state に紐づける。これにより、C^* 有限相関長状態は primitive な purely generated state から構成されることがわかる。

2.1 VBS 状態との等価性

C^*-有限相関長状態は VBS 状態と等価であることを remark しておく。参照系となる有限次元 C^*-代数 $\mathscr{B}$, $\bar{\mathscr{B}}$ を用意する。CP 写像 $\boldsymbol{F}:\mathscr{A}\to\mathscr{B}\otimes\bar{\mathscr{B}}$ と $\Phi:\bar{\mathscr{B}}\otimes\mathscr{B}\to\mathbb{C}$ で

$$(\mathrm{id}_{\mathscr{B}}\otimes\Phi)(\boldsymbol{F}(1_{\mathscr{A}})\otimes 1_{\mathscr{B}})=1_{\mathscr{B}}$$
$$(\Phi\otimes\mathrm{id}_{\bar{\mathscr{B}}})(1_{\bar{\mathscr{B}}}\otimes\boldsymbol{F}(1_{\mathscr{A}}))=1_{\bar{\mathscr{B}}}$$

を満たすものにより、任意の連続する n サイト上で状態 ω は

$$\omega(A_1\otimes\cdots\otimes A_n)=\underbrace{\Phi\otimes\cdots\otimes\Phi}_{n+1}(1_{\bar{\mathscr{B}}}\otimes\boldsymbol{F}(A_1)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{F}(A_n)\otimes 1_{\mathscr{B}})$$

と表されることが以下の命題で与えられる。Fig. 2 を参照。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \mathscr{A} & \otimes & \mathscr{A} & \otimes & \mathscr{A} & \otimes & \cdots & \otimes & \mathscr{A} & & \\
 & \downarrow \boldsymbol{F} & & \downarrow \boldsymbol{F} & & \downarrow \boldsymbol{F} & & & & \downarrow \boldsymbol{F} & & \\
1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes & \mathscr{B} \otimes \bar{\mathscr{B}} & \otimes & \mathscr{B} \otimes \bar{\mathscr{B}} & \otimes & \mathscr{B} \otimes \bar{\mathscr{B}} & \otimes & \cdots & \otimes & \mathscr{B} \otimes \bar{\mathscr{B}} & \otimes 1_{\mathscr{B}} & \\
\downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & & & & & \downarrow \Phi & \\
\mathbb{C} & \otimes & \mathbb{C} & \otimes & \mathbb{C} & \otimes & & \cdots & & \otimes & \mathbb{C} & \equiv \mathbb{C}
\end{array}
$$

図 2: VBS 状態の構成

Prop. 5

任意の C^*-有限相関長状態は VBS 状態であり、逆もまた然り。さらに VBS 状態の表現で、$\mathscr{B} \cong \bar{\mathscr{B}} \cong \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ とできて、Φ は各成分への制限が忠実になる pure state であるようにとれる。

Prf. 写しただけ!!!!!!!!!

VBS 状態を与えたとき、

$$\boldsymbol{E}(A \otimes B) = (1_{\mathscr{B}} \otimes \Phi)(\boldsymbol{F}(A) \otimes B), \qquad \rho(B) = \Phi(1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes B)$$

と定義する。$\boldsymbol{F}$ と ρ の compatibility 条件は

$$\boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes 1_{\mathscr{B}}) = (1_{\mathscr{B}} \otimes \Phi)(\boldsymbol{F}(1_{\mathscr{A}}) \otimes 1_{\mathscr{B}}) = 1_{\mathscr{B}}$$

$$\rho \circ \boldsymbol{E}_{1_{\mathscr{A}}}(B) = \Phi(1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes ((1_{\mathscr{B}} \otimes \Phi)(\boldsymbol{F}(1_{\mathscr{A}}) \otimes B))) = ???????$$

により $\boldsymbol{E}, \rho$ の compatibility 条件になる。n の帰納法によって ω が $(\boldsymbol{E}, \rho)$ により生成されることが示される。

逆に C^*-有限相関長状態を与えたとき, dilation $\tilde{\omega}$ から VBS 状態を構成する。そこで Prop. 4 (1) により $\mathscr{A} = \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathscr{B} = \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $\boldsymbol{E}(A \otimes B) = V^\dagger(A \otimes B)V$ として良い。$V : \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ は isometry, ρ は faithful である。そこである直交基底 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha=1}^k \subset \mathcal{K}$ をとることで

$$\rho(B) = \sum_\alpha \rho_\alpha \langle \chi_\alpha, B\chi_\alpha \rangle$$

と書くことができる。$\bar{\mathscr{B}} = \mathcal{B}(\bar{\mathcal{K}})$ を conjugate Hilbert space $\bar{\mathcal{K}}$ の上の有界作用素代数とする。$\Phi : \bar{\mathscr{B}} \otimes \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ をは pure であり、$\mathscr{B}$ への制限は忠実な状態 ρ.why?????????? ここで

$$\Phi(X) = \langle \varphi, X\varphi \rangle, \quad \varphi = \sum_{\alpha=1}^k \sqrt{\rho_\alpha \chi_\alpha} \otimes \chi_\alpha \in \bar{\mathcal{K}} \otimes \mathcal{K}$$

とする。すなわち $B \mapsto 1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes B$ は cyclic vector φ による $\mathscr{B}, \rho$ の GNS 表現である。写像 $\boldsymbol{F}$ は Steinspring dilation $\hat{V} : \bar{\mathcal{K}} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ を用いて

$$\boldsymbol{F}(A) = \hat{V}^\dagger A \hat{V}, \quad \text{w/ } \left\langle \psi, \hat{V}\chi \otimes \bar{\chi'} \right\rangle = \left\langle \psi \otimes (\rho^{-1/2}\chi'), V\chi \right\rangle$$

で与える。$\boldsymbol{F}$, Φ が compatibility 条件を満たし、ω に一致する VBS を生成することを確かめる。まず $\rho(B) = \Phi(1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes B)$ は

$$\begin{aligned}\Phi(1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes B) &= \sum_{\alpha,\beta} \left\langle \sqrt{\rho_\alpha \chi_\alpha} \otimes \chi_\alpha, (1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes B)\sqrt{\rho_\beta \chi_\beta} \otimes \chi_\beta \right\rangle \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha \langle \chi_\alpha, B\chi_\alpha \rangle = \rho(B)\end{aligned}$$

により成立する。基底 $\{\psi_\mu\}_{\mu=1}^d \subset \mathcal{H}$ をとると

$$\begin{aligned}&\langle \chi, (\mathrm{id}_{\mathscr{B}} \otimes \Phi)(\boldsymbol{F}(A) \otimes B)\chi' \rangle_{\mathscr{B}} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^k \sqrt{\rho_\alpha \rho_\beta} \langle \chi \otimes \bar{\chi}_\alpha \otimes \chi_\alpha, (\boldsymbol{F}(A) \otimes B)\chi' \otimes \bar{\chi}_\beta \otimes \chi_\beta \rangle_{\mathscr{B}\otimes\bar{\mathscr{B}}\otimes\mathscr{B}} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^k \sqrt{\rho_\alpha \rho_\beta} \left\langle \chi \otimes \bar{\chi}_\alpha, \hat{V}^\dagger A \hat{V} \chi' \otimes \bar{\chi}_\beta \right\rangle_{\mathscr{B}\otimes\bar{\mathscr{B}}} \langle \chi_\alpha, B\chi_\beta \rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^k \sum_{\mu,\nu=1}^d \sqrt{\rho_\alpha \rho_\beta} \left\langle \hat{V}\chi \otimes \bar{\chi}_\alpha, \psi_\mu \right\rangle \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \left\langle \psi_\nu, \hat{V}\chi' \otimes \bar{\chi}_\beta \right\rangle \langle \chi_\alpha, B\chi_\beta \rangle \\ &= \sum_{\mu,\nu} \sum_{\alpha,\beta} \langle V\chi, \psi_\mu \otimes \chi_\alpha \rangle \langle \psi_\mu \otimes \chi_\alpha, (A \otimes B)\psi_\nu \otimes \chi_\beta \rangle \langle \psi_\nu \otimes \chi_\beta, V\chi' \rangle \\ &= \langle V\chi, (A \otimes B)V\chi' \rangle = \langle \chi, \boldsymbol{E}(A \otimes B)\chi' \rangle\end{aligned}$$

を得るので、$\boldsymbol{E}(A \otimes B) = (\mathrm{id}_{\mathscr{B}} \otimes \Phi)(\boldsymbol{F}(A) \otimes B)$ が成立する。$A = 1_{\mathscr{A}}, B = 1_{\mathscr{B}}$ にて compatibility 条件が得られる。その他の条件も、

$$\begin{aligned}&\langle \bar{\chi}, (\Phi \otimes \mathrm{id}_{\bar{\mathscr{B}}})(1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes \boldsymbol{F}(1_{\mathscr{A}}))\bar{\chi}' \rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \sqrt{\rho_\alpha \rho_\beta} \left\langle \bar{\chi}_\alpha \otimes \chi_\alpha \otimes \bar{\chi}, (1_{\bar{\mathscr{B}}} \otimes \hat{V}^\dagger 1_{\mathscr{A}} \hat{V})\bar{\chi}_\beta \otimes \chi_\beta \otimes \bar{\chi}' \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \sqrt{\rho_\alpha \rho_\beta} \delta_{\alpha,\beta} \left\langle \hat{V}\chi_\alpha \otimes \bar{\chi}, \hat{V}\chi_\beta \otimes \bar{\chi}' \right\rangle \\ &= \sum_\alpha \sum_\mu \rho_\alpha \left\langle \hat{V}\chi_\alpha \otimes \bar{\chi}, \psi_\mu \right\rangle \left\langle \psi_\mu, \hat{V}\chi_\alpha \otimes \bar{\chi}' \right\rangle \\ &= \sum_\alpha \sum_\mu \rho_\alpha \left\langle V\chi_\alpha, \psi_\mu \otimes \rho^{-1/2}\chi \right\rangle \left\langle \psi_\mu \otimes \rho^{-1/2}\chi', V\chi_\alpha \right\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\left[\rho \boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes (\rho^{-1/2} |\chi\rangle \langle \chi'| \rho^{-1/2}))\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\rho\rho^{-1/2} |\chi\rangle \langle \chi'| \rho^{-1/2}\right] = \langle \bar{\chi}, \bar{\chi}' \rangle\end{aligned}$$

から得られる。最後の段への変形は???????

3 純粋に生成された状態の基底状態としての性質

ここから先は MACS のために $\dagger$ を $*$ にしたりしている。

purely generated state についてもうちょい深掘りする。Prop. 4 (元論文 Prop. 4.2) (1) により、$\mathscr{A} = \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$, $\mathscr{B} = \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ ととれて、それぞれ d 次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と k 次元 Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上に表現されているとできる。さらに pure な CP 写像 $\boldsymbol{E} : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ は dilation を与える isometry $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ を用いて $\boldsymbol{E}(A \otimes B) = V^\dagger (A \otimes B) V$ と表される。$\boldsymbol{E}$ が peripheral spectrum を持たない ($\iff$ 並進対称性がフルに守られている) ことは

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\boldsymbol{E}}^n(B) =: \hat{\boldsymbol{E}}^\infty(B) = \mathrm{Tr}[\rho B] 1_{\mathscr{B}} \qquad \forall B \in \mathscr{B} \tag{3.1}$$

と書ける。[*2] ここに、ρ は $\hat{\boldsymbol{E}}$ で不変な正定値密度行列で、$\boldsymbol{E}$ が ergodic であることにより unique になる。$\boldsymbol{E}$ は dilation V により決定されて ρ は $\boldsymbol{E}$ により決定されるので、ω も V により完全に決定される。

次元の話はパッと見でわからなかったし今後使いそうにもないので省略。

正規直交基底として $\{\psi_\mu\}_{\mu=1}^d \subset \mathcal{H}, \{\chi_\alpha\}_{\alpha=1}^k \subset \mathcal{K}$ をとる。

$$V\chi = \sum_\mu \psi_\mu \otimes (v(\mu)^* \chi)$$

により行列 $v(\mu) \in \mathscr{B} = \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$ を定義する。[*3] 一般の行列要素 $\langle \chi, \boldsymbol{E}(A \otimes B)\chi' \rangle$ を考えることで、

$$\boldsymbol{E}_A(B) := \boldsymbol{E}(A \otimes B) = \sum_{\mu,\nu=1}^d \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle\, v(\mu) B v(\nu)^* \tag{3.2}$$

$$\sum_\mu v(\mu) v(\mu)^* = \boldsymbol{E}(1_{\mathscr{A}} \otimes 1_{\mathscr{B}}) = 1_{\mathscr{B}} \tag{3.3}$$

$$\sum_\mu v(\mu)^* \rho v(\mu) = \rho$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}(B) = \sum_{\mu=1}^d v(\mu) B v(\mu)^*$$

である。実際、第 1 式は

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \boldsymbol{E}_A(B)\chi' \rangle &= \langle \chi, V^*(A \otimes B) V\chi' \rangle = \langle V\chi, (A \otimes B) V\chi' \rangle \\
&= \left\langle \sum_\mu \psi_\mu \otimes (v(\mu)^*\chi), (A \otimes B) \sum_\nu (\psi_\nu \otimes (v(\nu)^* \chi')) \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \langle v(\mu)^*\chi, B v(\nu)^* \chi' \rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \langle \chi, v(\mu) B v(\nu)^* \chi' \rangle
\end{aligned}$$

から得られて、あとはそれぞれに $(1_{\mathscr{A}} \otimes 1_{\mathscr{B}}), (1_{\mathscr{A}} \otimes \rho), (1_{\mathscr{A}} \otimes B)$ を代入すれば良い。

[*2] $\hat{\boldsymbol{E}}$ の右固有ベクトルが $1_{\mathscr{B}}$ であり、無限回の作用で残りの固有空間は 0 へ収束するので、$\hat{\boldsymbol{E}}^\infty(B) \propto 1_{\mathscr{B}}$ となる。この比例定数を c_B とすると、左固有ベクトルが密度行列 ρ であることから、

$$\mathrm{Tr}[\rho B] = \mathrm{Tr}\Big[\rho \hat{\boldsymbol{E}}^\infty(B)\Big] = c_B \,\mathrm{Tr}[\rho 1_{\mathscr{B}}] = c_B$$

となるので上記の形になる。

[*3] 基底に依存しない書き方をすると、線型写像 $\bar{v} : \mathcal{H} \to \mathscr{B}$ を $\langle \chi, \bar{v}(\psi)\chi' \rangle = \langle V\chi, \psi \otimes \chi' \rangle$ で定めて、$\bar{v}(\psi_\mu) = v(\mu)$ とすれば良い。

$$
\begin{array}{c}
\underbrace{\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{H} & \otimes & \mathcal{H} & \otimes & \otimes\cdots\otimes & \mathcal{H} \\
\uparrow\hat{V} & & \uparrow\hat{V} & & & \uparrow\hat{V} \\
\mathcal{K}\otimes\bar{\mathcal{K}} & \otimes & \mathcal{K}\otimes\bar{\mathcal{K}} & \otimes\ \mathcal{K} & \otimes\cdots\otimes & \mathcal{K}\otimes\bar{\mathcal{K}} \\
\rotatebox{90}{$\in$}\quad\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\chi_L\otimes\ \ \varphi & \otimes & \varphi & & \otimes\cdots\otimes & \otimes\bar{\chi}_R
\end{array}} \\
\uparrow \\
\chi_L \otimes \bar{\chi}_R
\end{array}
$$

図 3: $\Gamma_n : \mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$ の定義

この 1 サイト CP 写像の表式を連ねることで

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{(n)}_{A_1\otimes\cdots\otimes A_n} &= \boldsymbol{E}_{A_1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{E}_{A_n} \\
&= \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=1}^{d} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=1}^{d} \langle \psi_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{\mu_n}, A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \psi_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{\nu_n} \rangle \\
&\quad \times v(\mu_1)\cdots v(\mu_n) B v(\nu_n)^* \cdots v(\nu_1)^*
\end{aligned}
$$

が得られる。

これにより VBS 状態の構成で現れた blocking $\Gamma_n : \mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$ を書き換えられる (cf. Fig. 3)。$\mathcal{K} \otimes \bar{\mathcal{K}} \cong \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C}) \cong \mathscr{B}$ を完全に同一視すると $\Gamma_n : \mathscr{B} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$ は

$$
\Gamma_n(B) = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n=1}^{d} \psi_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{\mu_n} \operatorname{Tr}[B v(\mu_n)^* \cdots v(\mu_1)^*] \tag{3.4}
$$

となる。NOT CHECKED YET!!!!!!!!! Sec. 4 であまり Γ_n について非自明なことを言っていないので、これを頭から定義としても問題ない気がする。添え字の順番が非自明なので注意。$\mathcal{G}_n = \Gamma_n(\mathscr{B}) \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$ として、そこへの直交射影を G_n とする。

Lem. 6: blocked MPS Γ_n による状態の表現

1. 任意の $A \in \mathscr{A}^{\otimes n}$ について
$$
\omega(A) = \operatorname{Tr}[\Gamma_n W_\infty \Gamma_n^* \cdot A].
$$
ここに、$W_\infty : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ は $(\mathscr{B}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\rho = \operatorname{Tr}[\rho \cdot^* \cdot])$ における fixed density matrix で $W_\infty(B) = \rho B \rho$.
2. 任意の $A \in \mathscr{A}^{\otimes n}$, $B, C \in \mathscr{B}$ について
$$
\langle \Gamma_n(B), A\Gamma_n(C) \rangle = \sum_{\alpha,\beta} \left\langle \chi_\alpha, \boldsymbol{E}^{(n)}_A (B^* \left|\chi_\alpha\right\rangle \left\langle\chi_\beta\right| C) \chi_\beta \right\rangle. \tag{3.5}
$$

Prf.

$n=1$ について示せば、一般には μ,ν の n-tuple 版を考えれば良い。(3.2) より

$$\begin{aligned}
\omega(A) = \mathrm{Tr}[\rho \boldsymbol{E}_A(1_{\mathscr{B}})] &= \sum_{\mu,\nu} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \mathrm{Tr}[\rho v(\mu) v(\nu)^*] \\
&= \sum_{\mu,\nu}\sum_{\alpha,\beta} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \langle \chi_\alpha, \sqrt{\rho} v(\mu)\chi_\beta \rangle \langle \chi_\beta, v(\nu)^* \sqrt{\rho}\chi_\alpha \rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu}\sum_{\alpha,\beta} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \mathrm{Tr}[v(\mu)^* \sqrt{\rho} |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\beta|]^* \mathrm{Tr}[v(\nu)^* \sqrt{\rho} |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\beta|] \\
&\overset{(3.4)}{=} \sum_{\alpha,\beta} \langle \Gamma_1(B_{\alpha\beta}), A\Gamma_1(B_{\alpha\beta}) \rangle
\end{aligned}$$

where $B_{\alpha\beta} = \sqrt{\rho}|\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\beta|$. 固定点の密度行列は

$$\begin{aligned}
\langle C, W_\infty C' \rangle_\rho &\overset{!?}{=} \sum_{\alpha,\beta} \langle B_{\alpha\beta}, C' \rangle_\rho \langle C, B_{\alpha\beta} \rangle_\rho \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{Tr}[\rho |\chi_\beta\rangle\langle\chi_\alpha| \sqrt{\rho} C'] \mathrm{Tr}[\rho C^* \sqrt{\rho} |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\beta|] \\
&= \mathrm{Tr}[\rho C^* \sqrt{\rho}\sqrt{\rho} C' \rho] = \langle C, \rho C' \rho \rangle_\rho
\end{aligned}$$

を満たすようにとれるため、$W_\infty(B) = \rho B \rho$ である。したがって

$$\begin{aligned}
\omega(A) &= \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{Tr}[\Gamma_1(B_{\alpha\beta})\Gamma_1(B_{\alpha\beta})^* \cdot A] \\
&= \sum_{\mu,\nu}\sum_{\alpha,\beta} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \mathrm{Tr}[\langle\psi_\mu| \Gamma_1(B_{\alpha\beta})\Gamma_1(B_{\alpha\beta})^* |\psi_\nu\rangle]
\end{aligned}$$

(1) が示された。

(2) の証明にあたっては Γ の定義におけるトレースを基底 $\{\chi_\alpha\}$ で展開して、

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma_1(B), A\Gamma_1(C) \rangle &\overset{(3.4)}{=} \left\langle \sum_{\mu,\alpha} \psi_\mu \langle \chi_\alpha, Bv(\mu)^*\chi_\alpha \rangle, A \sum_{\nu,\beta} \psi_\nu \langle \chi_\beta, Cv(\nu)^*\chi_\beta \rangle \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu}\sum_{\alpha,\beta} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle \langle Bv(\mu)^*\chi_\alpha, \chi_\alpha \rangle \langle \chi_\beta, Cv(\nu)^*\chi_\beta \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \langle\chi_\alpha| \sum_{\mu,\nu} \langle \psi_\mu, A\psi_\nu \rangle v(\mu) B^* |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\beta| Cv(\nu)^* |\chi_\beta\rangle \\
&\overset{(3.2)}{=} \sum_{\alpha,\beta} \langle \chi_\alpha, \boldsymbol{E}_A(B^* |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\beta| C)\chi_\beta \rangle
\end{aligned}$$

Lem. 7

$\hat{\boldsymbol{E}}$ の 1 以外のスペクトル λ_i に対して $|\lambda_i| < \lambda < 1$ を満たすような λ をとる。このときある定数 c が存在して、任意の n について

$$a(n) := \mathrm{Tr}\big[\rho^{-1}\big] \|\hat{\boldsymbol{E}}^n - \hat{\boldsymbol{E}}^\infty\| \le c\lambda^n.$$

さらに以下の評価ができる。

1. 任意の $B, C \in \mathscr{B}$ について

$$|\langle \Gamma_n(B), \Gamma_n(C) \rangle - \langle B, C \rangle_\rho| \le a(n) \|B\|_\rho \|C\|_\rho.$$

2. 任意の $A \in \mathscr{A}^{\otimes n}$, $l, r \in \mathbb{N}$, $B, C \in \mathscr{B}$ について

$$\begin{aligned}&\left| \langle \Gamma_{l+m+r}(B), (1_l \otimes A \otimes 1_r) \Gamma_{l+m+r}(C) \rangle - \omega(A) \langle B, C \rangle_\rho \right| \\ &\quad \le (a(l) + a(r)) \|A\| \|B\|_\rho \|C\|_\rho.\end{aligned}$$

Prf.

■(1)　(3.5) に $A = 1_{\mathscr{A}}$ を代入すると

$$\langle \Gamma_n(B), \Gamma_n(C) \rangle = \sum_{\alpha,\beta} \left\langle \chi_\alpha, \hat{\boldsymbol{E}}^{(n)}(B^* |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\beta| C) \chi_\beta \right\rangle$$

である。上式右辺の $\hat{\boldsymbol{E}}^n$ を $\hat{\boldsymbol{E}}^\infty$ に置き換えたとき、(3.1) より

$$\sum_{\alpha,\beta} \langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle \operatorname{Tr}[\rho B^* |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\beta| C] = \operatorname{Tr}[\rho B^* C] = \langle B, C \rangle_\rho$$

となる。この差は

$$\begin{aligned}&\langle \Gamma_n(B), \Gamma_n(C) \rangle - \langle B, C \rangle_\rho \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \left\langle \chi_\alpha, (\hat{\boldsymbol{E}}^n - \hat{\boldsymbol{E}}^\infty)(B^* |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\beta| C) \chi_\beta \right\rangle \\ &\le \sum_{\alpha,\beta} \|\chi_\alpha\| \|\hat{\boldsymbol{E}}^n - \hat{\boldsymbol{E}}^\infty\| \|B^* \chi_\alpha\| \|C \chi_\beta\| \|\chi_\beta\| \\ &\le \|\hat{\boldsymbol{E}}^n - \hat{\boldsymbol{E}}^\infty\| \left(\sum_\alpha \|B^* \chi_\alpha\| \right) \left(\sum_\beta \|C \chi_\beta\| \right) \\ &\le \|\hat{\boldsymbol{E}}^n - \hat{\boldsymbol{E}}^\infty\| \operatorname{Tr}\left[\rho^{-1}\right] \|B\|_\rho \|C\|_\rho.\end{aligned}$$

ただし最後の不等号は $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\alpha|$ によって ρ_α を定め、

$$\begin{aligned}\left(\sum_\alpha \|B^* \chi_\alpha\| \right)^2 &= \left(\sum_\alpha \|B^* \chi_\alpha\| \rho_\alpha^{1/2} \rho_\alpha^{-1/2} \right)^2 \\ &\le \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \langle \chi_\alpha, B B^* \chi_\alpha \rangle \right) \left(\sum_\alpha \rho_\alpha^{-1} \right) = \|B\|_\rho^2 \operatorname{Tr}\left[\rho^{-1}\right]\end{aligned}$$

から得られる。

■(2)　再び (3.5) を用いて

$$\begin{aligned}&\langle \Gamma_{l+m+r}(B), (1_l \otimes A \otimes 1_r) \Gamma_{l+m+r}(C) \rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \left\langle \chi_\alpha, \hat{\boldsymbol{E}}^l \hat{\boldsymbol{E}}_A^m \hat{\boldsymbol{E}}^r (B^* |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\beta| C) \chi_\beta \right\rangle\end{aligned}$$

である。3 つの CP 写像の合成を

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{\infty}\hat{\boldsymbol{E}}_A^m\hat{\boldsymbol{E}}^{\infty} + \hat{\boldsymbol{E}}^l\hat{\boldsymbol{E}}_A^m(\hat{\boldsymbol{E}}^r - \hat{\boldsymbol{E}}^{\infty}) + (\hat{\boldsymbol{E}}^l - \hat{\boldsymbol{E}}^{\infty})\hat{\boldsymbol{E}}_A^m\hat{\boldsymbol{E}}^{\infty}$$

に分解すると、第 2 項以下は (1) によって評価され、第 1 項は

$$\sum_{\alpha} \mathrm{Tr}\Big[\rho\hat{\boldsymbol{E}}_A^m(1_{\mathscr{B}})\Big]\,\mathrm{Tr}[\rho B^* \left|\chi_\alpha\right\rangle \left\langle\chi_\alpha\right| C] = \omega(A)\left\langle B, C\right\rangle_\rho$$

となる。

Lem. 7 (1) の帰結として、十分大きな n では Γ_n が単射になる。実際、任意の $X \in \mathscr{B}$ について

$$\|\Gamma_n(X)\|^2 = \langle\Gamma_n(X), \Gamma_n(X)\rangle \geq \langle X, \rho X\rangle_\rho - a(n)\|X\|_\rho^2 \geq \langle X, \rho X\rangle_\rho - c\lambda^n$$

である。ρ は忠実としているので $X \in \ker\Gamma_n \implies X = 0$ となる。この事実は「normal MPS の blocking は injective」であることに対応している。この injectivity が monotone に成り立つことを以下の補題により保証する。すなわち injective MPS と MPS テンソルの blocking は injective のままである。

Lem. 8

$$a_-(n) = \inf\mathrm{spec}(\Gamma_n^*\Gamma_n) := \inf_{B\in\mathscr{B}, B\neq 0} \frac{\|\Gamma_n(B)\|^2}{\|B\|_\rho^2} \geq 1 - a(n)$$

は n について減少しない。

Prf.

Lem. 7 (1) より $\|\Gamma_n(B)\|^2 - \|B\|_\rho^2 \geq -a(n)\|B\|_\rho^2$ であるから、下限評価は自明。a_- の単調性については

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_{n+1}(B)\|^2 \\
&\overset{(3.4)}{=} \sum_{\mu_{n+1}}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n} |\mathrm{Tr}[(Bv(\mu_{n+1})^*)v(\mu_n)^*\cdots v(\mu_1)^*]|^2 \\
&\overset{(3.4)}{=} \sum_{\mu_{n+1}} \|\Gamma_n(Bv(\mu_{n+1})^*)\|^2 \\
&\geq \sum_{\mu_{n+1}} a_-(n)|Bv(\mu_{n+1})^*|_\rho^2 \\
&= \sum_{\mu} a_-(n)\,\mathrm{Tr}[\rho(Bv(\mu)^*)^*(Bv(\mu)^*)] \\
&= a_-(n)\,\mathrm{Tr}\left[\rho\sum_{\mu} v(\mu)B^*Bv(\mu)^*\right] \\
&\overset{(3.2)}{=} a_-(n)\,\mathrm{Tr}\Big[\rho\hat{\boldsymbol{E}}(B^*B)\Big] \\
&\overset{\rho\circ\hat{\boldsymbol{E}}=\rho}{=} a_-(n)\,\mathrm{Tr}[\rho B^*B]
\end{aligned}$$

から $a_-(n+1) \geq a_-(n)$ が従う。

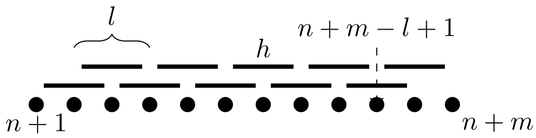


図 4: 有限サイズ Hamiltonian $H_{\{n+1,\ldots,n+m\}}$ の作用範囲

Def. 4: parent Hamiltonian

$\Gamma_l : \mathscr{B} \to \mathcal{H}^{\otimes l}$ が rank k^2 となる最小の $l \in \mathbb{N}$ を purely generated state ω の interaction length と呼んで l_0 で表す。positive operator $h \in \mathscr{A}^{\otimes l}$ が $l > l_0$ かつ $\ker h = \mathcal{G}_l = \Gamma_l(\mathscr{B})$ となるとき、h は ω を生じる interaction であるという。このとき $\alpha_i(h) \in \mathscr{A}_{\{i,i+1,\ldots,i+l-1\}}$ を h の並進で定めることで、系の Hamiltonian を

$$H = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(h)$$

とする。

長さ l の C^*-有限相関長状態が interaction length を超えていれば Γ_n が k^2 次元から d^l 次元への写像として単射なので、$d^l \geq k^2$ である。よって典型的には $l_0 \geq 2\ln k/\ln d$. by definition で ω は h の基底状態。

もし h が ω を生じるなら、有限サイズの Hamiltonian を ω で評価すると

$$H_{\{n+1,\ldots,n+m\}} = \sum_{i=0}^{m-l} a_{n+i}(h) \in \mathscr{A}_{\{n+1,\ldots,n+m\}}$$

は $m > l$ にて 0 になる (cf. Fig. 4)。

Lem. 9

任意の $m \geq l > l_0$ について

$$\mathcal{G}_m = \bigcap_{i=0}^{m-l} \mathcal{H}^{\otimes i} \otimes \mathcal{G}_l \otimes \mathcal{H}^{\otimes(m-l-i)}. \tag{3.6}$$

Prf.

m についての帰納法で示す。$m = l$ のとき自明。$\mathcal{G}_{l+1} = \mathcal{G}_l \otimes \mathcal{H} \cap \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}_l$ を示す。$l > l_0$ なので Γ_{l-1} は単射。すなわち任意の添字集合 $(\mu_1, \ldots, \mu_{l-1})$ について $\mathrm{Tr}[Bv(\mu_1)\cdots v(\mu_{l-1})] = 0$ ならば $B = 0$ である。$\mathcal{G}_l \cap \mathcal{H}$ のベクトル $\Phi = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_{l+1}} \Phi(\mu_1, \ldots, \mu_{l+1})\psi_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{\mu_{l+1}}$ を考える。$\mathcal{G}_l$ の定義により μ_{l+1} のみに依存する行列 $B(\mu_{l+1})$ が存在して

$$\Phi(\mu_1, \ldots, \mu_{l+1}) = \mathrm{Tr}[B(\mu_{l+1})v(\mu_l)^* \cdots v(\mu_1)^*].$$

Γ_l が単射なので $B(\mu_{l+1})$ は一意に定まる。同様に $\Phi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}_l$

$$\Phi(\mu_1, \ldots, \mu_{l+1}) = \mathrm{Tr}[C(\mu_1)v(\mu_{l+1})^* \cdots v(\mu_2)^*]$$

なる行列 $C(\mu_1)$ がただひとつ存在する。よって $\Phi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}_l \cap \mathcal{G}_l \otimes \mathcal{H}$ ならば

$$0 = \mathrm{Tr}[(v(\mu_1)^* B(\mu_{l+1}) - C(\mu_1)v(\mu_{l+1})^*)v(\mu_l)^* \cdots v(\mu_2)^*]$$

が任意の $(\mu_2,\dots,\mu_l)$ について成り立つので $v(\mu_1)^*B(\mu_{l+1})-C(\mu_1)v(\mu_{l+1})^*=0$. (3.3) により

$$B(\mu)=\sum_\nu v(\nu)v(\nu)^*B(\mu)=\sum_\nu v(\nu)C(\nu)v(\mu)^*$$

であり、$\sum_\nu v(\nu)C(\nu)=:D$ とおけば $\Phi=\Gamma_{l+1}(D)\in\mathcal{G}_{l+1}$.
逆の包含は、$\Gamma_{l+1}(D)=\Phi$ によって与えられた D について $B(\mu)=Dv(\mu)^*$, $C(\mu)=v(\mu)^*D$ とおけば自明。

intersection の話は関連性がわからなかったので飛ばす。

同じ状態 ω を与えるような異なる interaction の特性を以下の補題で与える。今、状態は ergodic であることを仮定しているので、blocking により $h'\in(\mathscr{A}^{\otimes p})^{\otimes l'}=\mathscr{A}^{\otimes pl'}$ も同じ状態 ω を与えることができるだろう。このような相互作用は以下の意味で等価である。

Lem. 10: 同じ状態を与える Hamiltonian は等価

$h\in\mathscr{A}^{\otimes l}$ を ω を与える相互作用、$p,l'\in\mathbb{N}$ を $pl'>l_0$ となる整数とする。$h'\in\mathscr{A}^{\otimes pl'}$ と $m\in\mathbb{N}$ によって

$$H'_{\{1,\dots,pm\}}=\sum_{i=0}^{m-l'}\alpha_{pi}(h')$$

を定義する。h' が $(\mathscr{A}^{\otimes p})_{\mathbb{Z}}$ 上に ω を与える相互作用ならば、ある定数 $C_\pm$ が存在して、$pm\ge l+p-1$ と $m\ge l'$ を満たす任意の m に対し

$$C_-H_{\{1,\dots,pm\}}\le H'_{\{1,\dots,pm\}}\le C_+H_{\{1,\dots,pm\}}.$$

Prf.

m_0 を $m\ge l'$, $m\ge(l+p-1)/p$ を満たす最小の整数とする。Hamiltonian $H_0:=H_{\{1,\dots,pm_0\}}$, $H'_0:=H'_{\{1,\dots,pm_0\}}$ はともに $\mathscr{A}_{\{1,\dots,pm_0\}}$ 上で定義され、ともに ω を与える。よって同じ kernel $\mathcal{G}_{pm_0}$ を持ち、

$$H_0\le\|H_0\|(1-G_{pm_0})\le\|H_0\|\eta'^{-1}H'_0,$$
$$H'_0\le\|H'_0\|(1-G_{pm_0})\le\|H_0\|\eta^{-1}H_0.$$

ここに、$\eta'>0$ は H'_0 の非零最小固有値 (gap)。$m\ge m_0$ について、

$$\begin{aligned}H_{\{1,\dots,pm\}}&=\sum_{i=0}^{pm-l}\alpha_i(h)\\&\le\sum_{i=0}^{m-m_0}\sum_{j=0}^{pm_0-l}\alpha_{pi+j}(h)=\sum_{i=0}^{m-m_0}\alpha_{pi}(H_0)\\&\le m_0H_{\{1,\dots,pm\}}\end{aligned}$$

が成り立つ。第 2 の不等号は、単一の値 $k=pi+j$ を与える整数 i が $k-(pm_0-l)\le pi\le k$ の値を動くことから $(pm_0-l)/p<m_0$ で押さえられること (同じ並進の重複が m_0 以下であること) を利用

した。同様に、

$$\begin{aligned}
H'_{\{1,\dots,pm\}} &= \sum_{i=0}^{pm-pl'} \alpha_i(h') \\
&\leq \sum_{i=0}^{m-m_0} \sum_{j=0}^{m_0-l'} \alpha_{p(i+j)}(h') = \sum_{i=0}^{m-m_0} \alpha_{pi}(H'_0) \\
&\leq (m_0 - l' + 1) H'_{\{1,\dots,pm\}}
\end{aligned}$$

である。第 2 の不等号は $k = i + j$ を与える $0 \leq j \leq m_0 - l'$ が最大で $m_0 - l' + 1$ 個であること (同じ並進の重複が $m_0 - l' + 1$ 回以下であること) を利用して得られる。ここまでの不等式を合わせると、$C_- = \eta' \| H_0 |^{-1} (m_0 - l' + 1)^{-1}$ により

$$\begin{aligned}
C_- H_{\{1,\dots,pm\}} &= \eta' \| H_0 \|^{-1} (m_0 - l' + 1)^{-1} H_{\{1,\dots,pm\}} \\
&\leq (m_0 - l' + 1)^{-1} \sum_{i=0}^{m-m_0} \alpha_{pi}(\eta' \| H_0 \|^{-1} H_0) \\
&\leq (m_0 - l' + 1)^{-1} \sum_{i=0}^{m-m_0} \alpha_{pi}(H'_0) \\
&\leq H'_{\{1,\dots,pm\}}.
\end{aligned}$$

$C_+ = \eta^{-1} \| H'_0 \| m_0$ により

$$\begin{aligned}
C_+ H_{\{1,\dots,pm\}} &= \eta^{-1} \| H'_0 \| m_0 H_{\{1,\dots,pm\}} \\
&\geq \sum_{i=0}^{m-m_0} \alpha_{pi}(\eta^{-1} \| H'_0 \| H_0) \\
&\geq \sum_{i=0}^{m-m_0} \alpha_{pi}(H'_0) \\
&\geq H'_{\{1,\dots,pm\}}.
\end{aligned}$$

上では parent Hamiltonian の等価性を与えたが、Hamiltonian の local term を決めると基底状態がただ一つに定まることも示せる。

Thm. 11: parent Hamiltonian の基底状態は unique

$h \in \mathscr{A}^{\otimes l}$ を ω を与える相互作用とする。このとき ω は $\mathscr{A}_{\mathbb{Z}}$ 上で

$$\omega(\alpha_i(h)) = 0$$

を任意の i で満たすただ一つの状態。

Prf.

$\tilde{\omega}$ を任意の $i \in \mathbb{Z}$ で $\tilde{\omega}(\alpha_i(h)) = 0$ を満たす状態とする。$i \in \mathbb{Z}$, $n \geq l$ にて $\tilde{\omega}|_{\mathscr{A}_{\{i+1,\ldots,i+n\}}}$ の密度行列 $W_{\{i+1,i+n\}}$ を与えると、これは $\bigcap_{s=0}^{n-l} \mathcal{H}^{\otimes s} \otimes \mathcal{G}_l \otimes \mathcal{H}^{\otimes(n-l-s)}$ に台を持つ。why?????????
(3.6) により台は $\mathcal{G}_n$ に一致。よって密度行列の表現として、ある $B_s \in \mathscr{B}$ により $W_{\{i+1,\ldots,i+n\}} = \sum_k |\Gamma_n(B_s)\rangle\langle\Gamma_n(B_s)|$ と書ける。ただし、$|\Gamma_n(B_s)\rangle$ は規格化して $\sum_s \|\Gamma_n(B_s)\|^2 = 1$ とする。任意の $A \in \mathscr{A}_{\{j+1,\ldots,j+m\}}$ について Lem. 7 (2) を用いて

$$\begin{aligned}
|\tilde{\omega}(A) - \omega(A)| &= \left| \sum_s \langle \Gamma_n(B_s), A\Gamma_n(B_s)\rangle - \omega(A) \langle \Gamma_n(B_s), \Gamma_n(B_s)\rangle \right| \\
&\leq [a(j-i) + a(n+i-j-m)]\|A\| \sum_s \|B_s\|_\rho^2 \\
&\leq [a(j-i) + a(n+i-j-m)] a_-(n)^{-1} \|A\|.
\end{aligned}$$

最後の不等号は

$$a_-(n) := \inf_{B \in \mathscr{B}\setminus\{0\}} \|\Gamma_n(B)\|^2/\|B\|_\rho^2 \leq \|\Gamma_n(B_s)\|^2/\|B_s\|_\rho^2 = 1/\|B_s\|_\rho^2$$

による。十分小さい i と十分大きい n をとれば、$a(n) := \mathrm{Tr}\left[\rho^{-1}\right]\|\hat{\boldsymbol{E}}^n - \hat{\boldsymbol{E}}^\infty\|$ が指数関数的に 0 に近づくことから、$\tilde{\omega}(A) = \omega(A)$ が従う。

Def. 5: VBS 相互作用

$l < \infty$ サイズの相互作用 $h \in \mathscr{A}^{\otimes l}$ が以下の条件を満たすとき、h は VBS 相互作用であるという。C^*-有限相関長状態 ω が存在して、

1. $h \geq 0$ かつ $\omega(h) = 0$
2. 任意の $n \geq l$ について $H_{\{1,\ldots,n\}} = \sum_{i=0}^{n-l} \alpha_i(h)$ を local Hamiltonian, η を $H_{\{1,\ldots,n\}}$ の基底状態とすると、ある定数 C により $\eta \leq C\omega|_{\mathscr{A}_{\{1,\ldots,n\}}}$ が成り立つ

Thm. 11 により VBS 相互作用を与えると基底状態がただ一つ存在することが保証される。ω の interaction length が l_0 なら、ω を与える長さ l_0+1 の相互作用 h が常に存在するが、$l = l_0$ でも VBS 相互作用を与える例がある。

相互作用に与えられる ergodic な無限長状態が必ず C^*-有限相関長状態になるからと言って、その相互作用が VBS 相互作用になるとは限らないことに注意。例えば spin 1/2 強磁性 Heisenberg 模型が反例になる (Example 5)。

C^*-有限相関長状態の分解の一意性 (元論文 Cor. 3.4) と VBS の定義を照らし合わせると、基底状態における対称性の破れはある種のものに限られる。C^*-有限相関長状態は高々有限個の ergodic (または periodic) な成分にしか分解できないことを反映している。特に連続対称性を破るには、必ず並進対称性も full に破られ (periodicity が完全に消えて)、residual entropy が生成されなければならない。[FNW92a] を参照。

参考文献

[FNW92a] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. F. Werner. Entropy estimates for finitely correlated states. *Annales de l' I. H. P.*, 57(3):259–277, 1992.

[FNW92b] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. F. Werner. Finitely correlated states on quantum spin chains. *Communications in Mathematical Physics*, 144:443–490, May 1992.