

# toric code and quantum double 個人メモ

Takuma Saito

2026年4月24日

[Kit03] のレビュー。

## 目次

第 I 部	toric code	2
1	Toric code	2
1.1	基底状態の構成	2
1.2	基底状態空間の代数	3
1.3	エラー	4
2	Abelian anyons	5
3	ゲージ理論からみた toric code の対称性の発現	7
第 II 部	quantum double	9
4	quantum double	9
5	quantum double の代数構造	11
5.1	ribbon operators	11
5.2	粒子と局所演算子	12
付録 A	ゲージ理論	13
A.1	電磁場の量子化	13
A.2	U(1) Higgs mechanism	14
付録 B	Hopf 代数	15
付録 C	途中式の導出	19
C.1	extended Hilbert space の対称性演算子 (3.2)	19
C.2	quantum double の (co)multiplication 代数 (4.1) の導出	20
C.3	quantum double の local operator の可換性	20

# 第 I 部

## toric code

### 1 Toric code

#### 1.1 基底状態の構成

- $k \times k$  正方格子 on torus
- 辺に spin 1/2 の Hilbert space
- vertex  $s$  に対して  $A_s = \prod_{j \in \text{star}(s)} \sigma_j^x$  (stabilizer)
- plaquette  $p$  に対して  $B_p = \prod_{j \in \text{boundary}(p)} \sigma_j^z$  (stabilizer)

$\mathcal{N}$  を  $n = 2k^2$  個の qubit の Hilbert space

$$\mathcal{N} = \bigotimes_{e \in \text{edges}} \mathbb{C}^2$$

とする。protected subspace (基底状態空間)  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{N}$  を

$$\mathcal{L} = \{|\xi\rangle \in \mathcal{N} \mid A_s |\xi\rangle = |\xi\rangle, \quad B_p |\xi\rangle = |\xi\rangle \quad \forall s, p\}$$

とすると toric code になる。<sup>\*1</sup>

##### 1.1.1 基底状態の簡単な解釈

全 Hilbert 空間  $\mathcal{N}$  の規定として、各辺  $j$  にスピンの上下を表す  $z_j \in \{0, 1\}$  を割り当てる。

- $B_p |\xi\rangle = |\xi\rangle \implies$  plaquette の周囲の辺に割り当てられた  $z_j$  の和は偶数. このような基底ベクトルは non-trivial loop  $(c_{z1}, c_{z2})$  での  $z_j$  の和の偶奇により特徴付けられる
- $A_s |\xi\rangle = |\xi\rangle \implies$  同じ topological number を持つ基底ベクトルが同じ重みの線型結合になる ( $\sigma^X$  基底状態は  $\sigma^Z$  基底状態の重ね合わせになる)

$$|\xi_{v_1, v_2}\rangle = 2^{-(k^2-1)/2} \sum_{z_1, \dots, z_n} |z_1, \dots, z_n\rangle, \quad \sum_{j \in c_{z1}} z_j \equiv v_1 \pmod{2}, \quad \sum_{j \in c_{z2}} z_j \equiv v_2 \pmod{2}$$

全く同じ構成により  $\sigma^X$  を対角化する基底でも基底状態を構成できる。さらに fermion ( $e$  と  $m$  の composite) による two nontrivial Wilson loop も基底状態を特徴づける良い量子数になっている。<sup>\*2</sup>

<sup>\*1</sup> 元論文では toric code を以下の二つから引用しているが、一般に original article は [Kit03] とされるっぽい。See also <https://ncatlab.org/nlab/show/toric+code>.

- A. Yu. Kitaev, Quantum computing: algorithms and error correction, *Russian Math. Surveys*, to be published (1997).
- A. Yu. Kitaev, Quantum error correction with imperfect gates. In *Proceedings of the Third International Conference on Quantum Communication and Measurement, September 25-30, 1996*, to be published (1997).

<sup>\*2</sup> Hamiltonian と可換であること、 $\mathcal{I}$  の quotient で消えないことから、Wilson loop の有無で直交する基底状態の区別が可能であ

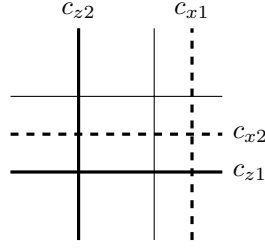


図 1: non-contractable loops on the lattice and the dual lattice for toric code

## 1.2 基底状態空間の代数

基底状態空間  $\mathcal{L}$  の次元は 4. これは簡単に計算できる。

- 全空間次元  $\dim \mathcal{N} = 2^{2k^2}$
- star stabilizer の次元は頂点数  $k^2$  個に固有値  $\pm 1$  があり、拘束条件  $\prod_s A_s = 1$  があるので  $2^{k^2} - 1$
- plaquette stabilizer の次元は面数  $k^2$  個に固有値  $\pm 1$  があり、拘束条件  $\prod_p B_p = 1$  があるので  $2^{k^2} - 1$
- 足し引きして  $\dim \mathcal{L} = 2^{2k^2 - (k^2 - 1) - (k^2 - 1)} = 4$

しかしもっと代数的な方法で計算すると後々の議論がスムーズになる。

- $\mathbf{L}(\mathcal{L})$ : 基底状態空間の中で閉じるような演算子の代数
- $\mathcal{F} \subset \mathbf{L}(\mathcal{L})$ :  $\text{Span}\{A_s, B_p \mid s, p\}$
- $\mathcal{G}$ :  $A_s, B_p$  全てと可換な演算子全体の代数
- $\mathcal{I}$ :  $A_s - 1, B_p - 1$  が生成するイデアル (代数と思えば十分)

$\mathcal{G}$  は lattice の loop  $c$  と dual lattice の loop  $c^*$  を指定することで得られる

$$Z = \prod_{j \in c} \sigma_j^z = \begin{array}{c} \text{---} c \text{---} \\ \sigma^z \\ \sigma^z \\ \sigma^z \\ \sigma^z \\ \text{---} c \text{---} \end{array}, \quad X = \prod_{j \in c^*} \sigma_j^x = \begin{array}{c} \sigma^x \quad \sigma^x \\ \sigma^x \quad \sigma^x \\ \sigma^x \quad \sigma^x \\ \sigma^x \quad \sigma^x \\ \sigma^x \quad \sigma^x \\ \text{---} c^* \text{---} \end{array}$$

により生成される。  $c, c^*$  が contractible なら  $Z, X$  はそれぞれループ内部の  $B_p, A_s$  の積で表せるので、  $\text{mod } \mathcal{I}$  で自明。よって non-contractible なループしか面白くない。 non-contractible loop として Fig. 1 をとり、それぞれ  $Z_1, Z_2, X_1, X_2$  とすると、  $\sigma_1^z, \sigma_2^z$  と  $\sigma_1^x, \sigma_2^x$  の関係と同様の交換関係を満たす。これはまさしく 2 つの qubit を汲んでいて、  $\dim \mathcal{L} = 4$  を反映している。 See also Tbl. 1.

る。 Wilson loop の数に対応する具体的な固有状態の構成は東大川畑研の下村 睦実氏が計算している。同じノートでは計算基底 ( $m$  condensate state) で展開したとき現れる係数と quadratic refinement の関係、  $f$  基底における duality operator の構成、  $\sigma^X$  対角基底 ( $e$  condensate state) による展開係数が Arf で書けることを示している。

表 1: toric code の代数の記号と次元

$\mathcal{N}$	全 Hilbert 空間 $\bigotimes_{e \in \text{edges}} \mathbb{C}^2$	$\dim \mathcal{N} = 2^{2k^2}$	
$\mathcal{G}$	$A_s, B_p$ 全てと可換な演算子全体の代数		1-cycles and 1-cocycles
$\mathcal{F}$	$\text{Span}\{A_s, B_p \mid s, p\}$	$\dim \mathcal{F} = 2^{2k^2-2}$	1-boundaries and 1-coboundaries
$\mathcal{I}$	$A_s - 1, B_p - 1$ が生成するイデアル		
$\mathcal{L}$	基底状態空間	$\dim \mathcal{L} = 2^2$	
$L(\mathcal{L})$	基底状態空間の中で閉じる演算子の代数		1-homology and 1-cohomology

### 1.3 エラー

#### 1.3.1 情報理論的解決

$k \times k$  toric code を考え、 $n = k^2$  とする。エラーとして

$$E = \sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n) = \prod_j (\sigma_j^x)^{\alpha_j} \prod_j (\sigma_j^z)^{\beta_j} \quad (\alpha_j, \beta_j \in \{0, 1\})$$

が発生したとする。

- $E \in \mathcal{G} \iff$  エラーは  $A_s, B_p$  の固有値を全て測定 (シンδροーム測定) しても検出不可可能
- $E \in \mathcal{F} \implies E|\xi\rangle = |\xi\rangle$  for  $\forall |\xi\rangle \in \mathcal{L}$ : エラーではない

したがって  $E \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$  だとエラーなのに検出不可可能なので困る。即ち  $E$  の support が non-contractible loop を形成しているときに困るが、 $|\text{supp}(E)| \geq k$  でなければならない。逆にそれ以外の場合はエラーを検出できる。

1. 1つの stabilizer operator は 4 qubit にしか作用しない
2. 1つの qubit は 4つの stabilizer operator にしか作用されない
3. 訂正できるエラーの数に上限がない ( $\mathcal{O}(k^2)$  個の qubit にエラーが発生しても、non-contractible loop error でなければ訂正できる)

エラーレートが定数だとすると、訂正不可可能な non-contractible loop を生じる確率は  $e^{-ak}$  のオーダーで抑えられる。嬉しい。

#### 1.3.2 物性的解決

シンδροーム測定 ( $A_s, B_p$  固有値の測定) を通して  $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$  を検出する“従来の方法”もいいが、もっと physical にエラー訂正ができる。

$$H_0 = - \sum_s A_s - \sum_p B_p$$

の commuting projector Hamiltonian の基底状態はまさしく toric code の基底状態空間  $\mathcal{L}$ 。エネルギーギャップは  $\Delta E \geq 2$ 。十分冷やしておけば、エラーが発生しても緩和過程により自動的に基底状態空間へ戻ることが期待される。

ただしこの Hamiltonian 自体が摂動に弱ければ使い物にならないので、摂動に対する安定性も重要な問題である。local term の support が最大 2 の perturbation

$$V = -\mathbf{h} \cdot \sum_j \boldsymbol{\sigma}_j - \sum_{j,p} J_{jp}(\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_p)$$

を用意して、直交する非摂動基底状態  $|\xi\rangle, |\eta\rangle \in \mathcal{L}$  の  $m$  次のエネルギー分裂を見ると、

$$\Delta\varepsilon = \mathcal{O}(\langle \xi | V^m | \eta \rangle, \langle \xi | V^m | \xi \rangle - \langle \eta | V^m | \eta \rangle)$$

である。ココちゃんと手を動かしてない!!!!!! しかし  $V^m$  が non-contractible loop を形成するような項を含んでいないといずれも 0 になるので、 $\lceil k/2 \rceil$  以上の摂動でなければエネルギー分裂は生じない。よって熱力学極限で splitting は  $e^{-ak}$  のオーダーで抑えられる。

この構成方法は square lattice に限らない。compactかつ orientable な 2 次元曲面で genus  $g$  のものなら基底状態は  $4^g$  次元になる。ちゃんと手を動かしてない!!!!!! 基底状態の縮退度が格子のトポロジーにしか依存していないので、トポロジカル秩序と呼んでいる。

- lattice の最小次元 (non-contractible loop の最小の長さ) を  $L$  とすることで基底状態の splitting は  $e^{-aL}$  により抑えられる
- エネルギーギャップは有限

有限のエネルギーギャップは場の理論の帰結から相関関数の指数減衰を与えるので物理は局所的に決まるはずだが、縮退度が topological な量に依存しているのはなぜか? — それは単純な 2 点相関関数では表せない long-range entanglement が存在するからである、ということを見ていく。

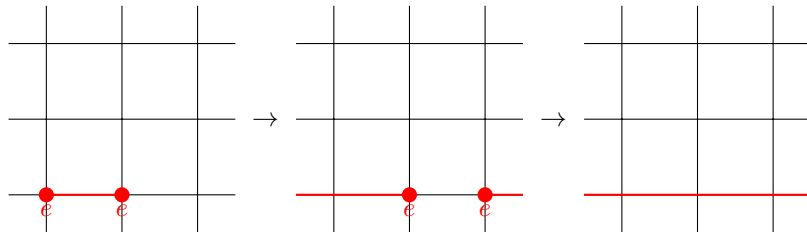
## 2 Abelian anyons

toric code の励起は  $A_s |\xi\rangle = B_p |\xi\rangle = |\xi\rangle$  を満たさない状態である。 $\prod_s A_s = \prod_p B_p = 1$  なので、励起は必ずペアで生じる。素励起として 2 粒子励起

$$|\psi^e(t)\rangle = S^e(t) |\xi\rangle := \prod_{j \in t} \sigma_j^z |\xi\rangle, \quad |\psi^m(t^*)\rangle = S^m(t^*) |\xi\rangle := \prod_{j \in t^*} \sigma_j^x |\xi\rangle$$

を構成できる。See Fig. 2. string operator  $S^e(t), S^m(t^*)$  は端点は stabilizer operator  $A_s, B_p$  と反交換するが、途中部分は stabilizer と可換。それぞれ string  $t$  と dual string  $t^*$  に依存するが、励起状態は string の homotopy class にしか依存しない。 $e, m$  が共に偶数個の配位であればどんな配位でも許され、各粒子の配位に対して  $|\xi\rangle$  を変更することで  $\mathcal{N}$  のうち  $4^g$  次元の部分空間を張る。

励起でトーラスを回すと違う状態に持ち込める。



摂動を考えると、

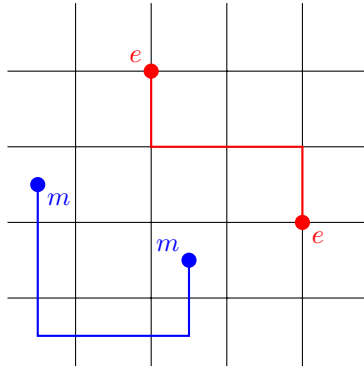
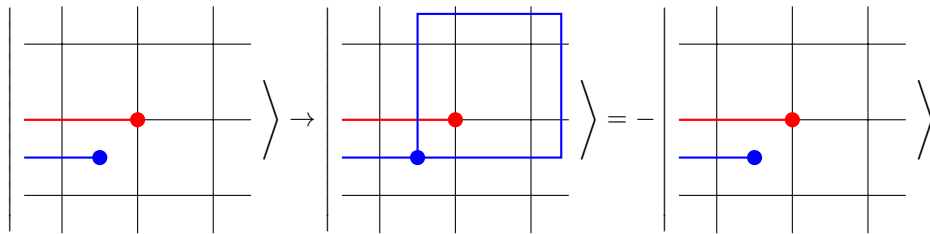


図 2: toric code の素励起

- $|\psi^{2,m}(t, t^*)\rangle$  は固有状態でなくなる
- したがって Schrödinger 方程式に従って時間発展させると励起が動く
- 基底状態から基底状態へ移るトンネルとして、virtual particle がトーラスを 1 周するような過程がある
- この過程は effective Hamiltonian に  $b_{z1}Z_1, b_{z2}Z_2, b_{x1}X_1, b_{x2}X_2$  の項を生じさせる
- 時間発展  $(1 - iHt)|\xi\rangle$  を念頭に置くと、 $b_{\alpha i} \sim e^{-a_\alpha L_i}$  はトンネル確立、 $a_\alpha \sim \sqrt{2m_\alpha \Delta E}$  は imaginary particle  $\alpha$  の波数

非摂動は  $m_\alpha \rightarrow \infty$  に対応。

braiding させると、



となって位相  $-1$  を獲得する。こういう統計性を持つ粒子を abelian anyon と呼ぶ。一般に、可換エニオンとは、(colored) braid group の非自明な 1 次元表現を実現する粒子のこと。  $m$  flux の周りを  $e$  charge が回ると位相  $-1$  を獲得するのは Aharonov-Bohm 効果とも見える。<sup>\*3</sup>

エニオンの存在と基底状態の縮退は密接に関連しており、共に topological order の帰結。エニオンが topological order を決定的に特徴付けていそうに見える。実際、トーラス上での基底状態の縮退はエニオンの存在から導ける。基底状態の縮退を logical operator  $Z_1, Z_2, X_1, X_2$  の存在から説明することもできる [Ein90]。logical operator は torus にしか作れないが、 $e, m$  粒子がそれぞれトーラスをまわって、逆操作で元の配位に戻る過程を考えると、 $W = X_1^{-1} Z_1^{-1} X_1 Z_1$  になって平面上でも実現可能 (Fig. 3)。反可換代数を実現するには少なくとも 2 次元以上の表現が必要なので、logical space は必ず縮退する。上記の議論を FQH に

\*3 filling  $p/q$  の分数量子ホール系の可換エニオンの統計性は今回の例と異なる。

- エニオンの basic type は electric charge  $1/q$  のみ
- その他の粒子は  $1/q$  の composition
- $1/q$  が  $1/q$  の周りを回ると位相  $e^{2\pi i/q}$  を獲得

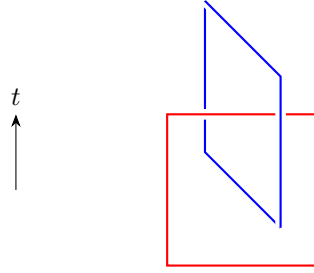


図 3: エニオン操作  $W$ . 軌道に沿ってエニオンを対生成、移動、対消滅させると braiding が発生して位相  $-1$  を獲得する。時間一定面における操作は logical operator  $Z_1, X_1$  に他ならないので、 $Z, X$  の反可換性が得られる。

適用したのが [Ein90]らしい。

### 3 ゲージ理論からみた toric code の対称性の発現

場の理論で研究されてきたゲージ理論を通してこの模型を解釈してみる。

**ベクトルポテンシャル** 辺  $j$  に割り当てた  $\sigma_j^z$  の固有値  $z_j \in \{0, 1\}$  変数

**磁束 (holonomy)** loop に沿ったベクトルポテンシャルの総和  $B_p = (-1)^{\sum_{j \in \text{boundary}(p)} z_j}$ : 線積分に対応

**局所ゲージ変換**  $A_s$  によってゲージ場が  $z_j \mapsto z_j + v_{s_1} + v_{s_2}$  と変換される。しかも物理的な磁束は不変にする

**電場** ベクトルポテンシャルの共役変数  $\sigma_j^x$ . See appendix 付録 A

$A_s |\xi\rangle = |\xi\rangle$  は  $|\xi\rangle$  がゲージ不変であることを意味する。 $B_p |\xi\rangle = |\xi\rangle$  はゲージ場が flat connection であることを意味する。ゲージ不変性や flatness を破ることはエネルギーコストがかかるものの、禁止されていない。Hamiltonian は摂動も加えることでゲージ自由度を必ずしも満たす必要はない。

対称性がなくても、 $e, m$  粒子数は mod 2 で保存される保存則が存在する。電磁気学における電荷保存は  $U(1)$  ゲージ不変性から得られていた。toric code では、個々の素励起が well-defined になる長距離において、dynamically created  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  symmetry が現れると見れる。では、この Hamiltonian には現れない  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  対称性は何者なのだろうか?

新しい自由度は vertex  $s$  と plaquette  $p$  に割り当てられる  $v_s, v_p \in \{0, 1\}$  である。

vertex spin  $2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$

face spin  $|0\rangle$

よって新しく導入した vertex と plaquette の Hilbert 空間では unique な状態  $|\zeta\rangle$  s.t.  $\sigma_s^x |\zeta\rangle = \sigma_p^z |\zeta\rangle = |\zeta\rangle$  になっている。数学的には、edge から構成される全 Hilbert 空間  $\mathcal{N}$  を edge, vertex, plaquette を含む Hilbert 空間  $\mathcal{T}$  に  $|\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle \otimes |\zeta\rangle$  として埋め込んだことになる。記号の濫用により  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  として、それぞれ physical space (subspace), extended space と呼ぶことにする。

extended space  $\mathcal{T}$  にユニタリ変換

$$v_s \mapsto v_s, \quad z_j \mapsto z_j + \sum_{s=\text{endpoint}(j)} v_s \pmod{2}, \quad w_p \mapsto w_p + \sum_{j \in \text{boundary}(p)} z_j \pmod{2} \quad (3.1)$$

表 2: U(1) 場の理論と toric code の比較

	U(1) gauge theory	toric code
対称性	U(1)	$\mathbb{Z}_2$ (実際は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ だが一旦片方だけ見る)
物質場	$\phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$	$v_s$ (vertex spin)
ゲージ場	$A(\mu)$	$z_j$ (edge spin)
物質場のゲージ変換	$\theta(x) \rightarrow \theta(x) + \alpha(x)$	$v_s \rightarrow v_s + 1 \pmod{2}$
ゲージ場のゲージ変換	$A(\mu) \rightarrow A(\mu) - \partial_\mu \alpha(x)$	$z_j \rightarrow z_j + v_{j_0} + v_{j_1}$
ゲージ変換の生成子		$P_s = \sigma_s^x A_s$
NG mode を消すゲージ固定	$\tilde{A} := A - \partial\alpha$	(3.1)

を考える。physical space は  $\mathcal{N}' = U\mathcal{N}$  になる。 $|\psi'\rangle \in \mathcal{N}'$  は以下の対称性演算子により不変になる。

$$P_s = U\sigma_s^x U^\dagger = \sigma_s^x A_s, \quad Q_p = U\sigma_p^z U^\dagger = \sigma_p^z B_p \quad (3.2)$$

この式の確認は appendix C.1 を参照。対称性演算子による不変性は以下により容易に確かめられる。

$$P_s |\psi'\rangle = P_s U |\psi\rangle = U \sigma_s^x |\psi\rangle = U |\psi\rangle, \quad Q_p |\psi'\rangle = Q_p U |\psi\rangle = U \sigma_p^z |\psi\rangle = U |\psi\rangle$$

また  $H = H_{\text{phys}} \otimes 1$  であるから手で加えた自由度に作用する  $\sigma_s^x, \sigma_p^z$  は  $H$  と可換なので、

$$[UHU^\dagger, P_s] = U[H, \sigma_s^x]U^\dagger = 0, \quad [UHU^\dagger, Q_p] = U[H, \sigma_p^z]U^\dagger = 0$$

よって  $P_s, Q_p$  は  $H' = UHU^\dagger$  と可換である。<sup>\*4</sup>特に  $P_s, Q_p$  を 1 と同一視すれば

$$UH_0U^\dagger = H'_0 \stackrel{!}{=} -\sum_s \sigma_s^x - \sum_p \sigma_p^z$$

と書ける。<sup>\*5</sup>

U(1) 場の理論 (See appendix 付録 A) と比較すると Tbl. 2 を得る。特に  $v_s$  を物質場として導入したのち、(3.1) のゲージ固定により理論全体をゲージ不変な形に書き直せたという事実が重要である。<sup>\*6</sup> なお、(3.1) は Higgs 機構のゲージ固定を追っているだけで、このプロセス全体を通して **artificial symmetry の SSB は全く前提していない**ことに注意せよ。

とはいえ、新しい自由度を外から加えて式変形したら  $\mathbb{Z}_2$  が現れたと言っているに過ぎない。真に知りたいのは、手で加えた artificial な対称性がなぜ物理としても現れるかである。<sup>\*7</sup> **本論文では答えが明示されていない**さそうだが、「artificial な対称性があっても物理に現れない」例として以下の簡単な議論ができる。

<sup>\*4</sup>  $H$  が摂動を含み  $A_s, B_p$  と非可換であっても同じ議論で対称性になる。

<sup>\*5</sup>  $UA_sU^\dagger = (U\sigma_s^x U^\dagger)^{-1}\sigma_s^x = P_s^{-1}\sigma_s^x \stackrel{!}{=} \sigma_s^x$  などから。

<sup>\*6</sup> 論文内で言われている

- $v_s$  ないし  $\sigma_s^z$  は Higgs field に、 $P_s$  は local gauge transformation に対応
- 任意の Hamiltonian は Higgs 場を加えることでゲージ不変な形に書き直せる  
という直感的な主張はこの表に基づいている。 $v_s$  は (3.1) を通して Higgs 場に対応させている。

<sup>\*7</sup> vertex  $s$  における電荷  $\sigma_s^x$  をコンパクト多様体の上で積分すると  $\prod_s \sigma_s^x = 1$  なので、総電荷は 0 でなければならない。しかしこの主張は、実際に discrete charged particle が存在しなければ物理的に意味のある statement になっていない。

Anderson-Higgs 機構は超伝導体の原理として知られているので、超伝導体を通してこの問題を考えてみる。U(1) を自発的に破って Higgs 場が非自明になる真空  $\phi(s) = \langle \sigma_s^z \rangle \neq 0$  が実現されると、これは超伝導相に入っている。

- 電荷は (Cooper pair を組んで) Bose-Einstein 凝縮し、電荷保存が意味をなさない
- Meissner effect により磁束が広がらず、flux tube に閉じ込められる

これは artificial な対称性が物理に現れない例である。electric/magnetic duality を考えると、逆に magnetic flux の対称性が破れて charge が閉じ込められることも考えられる。

つまり toric code に長距離の artificial symmetry  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  が現れるのは、

- Anderson-Higgs mechanism のゲージ固定によりゲージ不変な Hamiltonian に書き換えられる
- さらにこの対称性が非閉じ込め相に入ること、対称性が物理に現れる (materialize する)

と理解すればよさそう。ただし、なぜ非閉じ込めに入るかは別問題である。

## 第 II 部

# quantum double

## 4 quantum double

- $G$  は一般に非可換な有限群
- $\mathcal{H} = \mathbb{C}[G]$  は group algebra で、 $\{|g\rangle \mid g \in G\}$  を正規直交基底とする  $N = |G|$  次元 Hilbert 空間\*8
- 任意の 2D orientable closed surface 上の任意の lattice をとる
- 辺に向きと  $\mathcal{H}$  を割り当てる
- 辺の向きを入れ替えは  $|g\rangle \mapsto |g^{-1}\rangle$  に対応

群作用を与えなければならない。

$$L_+^g |z\rangle = |gz\rangle, \quad L_-^g |z\rangle = |zg^{-1}\rangle, \quad T_+^h |z\rangle = \delta_{h,z} |z\rangle, \quad T_-^h |z\rangle = \delta_{h^{-1},z} |z\rangle$$

とする。\*9それぞれの演算子は

$$L_+^g T_+^h = T_+^{gh} L_+^g, \quad L_-^g T_+^h = T_+^{hg^{-1}} L_-^g, \quad L_+^g T_-^h = T_-^{hg^{-1}} L_+^g, \quad L_-^g T_-^h = T_-^{gh} L_-^g \quad (4.1)$$

を満たす。端点の一つを  $s$ , 隣接する面の一つを  $p$  とする辺  $j$  への作用として

$$L^g(j, s) = \begin{cases} L_-^g(j) & \text{if } s \text{ is the origin of } j \\ L_+^g(j) & \text{if } s \text{ is the target of } j \end{cases}$$

$$T^h(j, p) = \begin{cases} T_-^h(j) & \text{if } p \text{ is the left adjacent of } j \\ T_+^h(j) & \text{if } p \text{ is the right adjacent of } j \end{cases}$$

\*8 さらに一般化して  $\mathcal{H}$  を有限次元 Hopf 代数  $w/$  hermitian scalar product with certain properties として定義できるが、深く立ち入ってない。Hopf 代数については appendix 付録 B を参照。

\*9 Hopf 代数では順に left/right multiplication と left/right comultiplication である。

として

$$A_g(s, p) = A_g(s) = \prod_{j \in \text{star}(s)} L^g(j, s), \quad B_h(s, p) = \sum_{h_1 \cdots h_k = h} \prod_{m=1}^k T^{h_m}(j_m, p)$$

を定義する。<sup>\*10</sup>ここに  $j_1, \dots, j_k$  は  $s$  を始点として  $p$  の境界を反時計回りに回る。例えば正方格子で右上に向かって向きづけすれば、

$$A_g(s, p) \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{z_1} \\ \uparrow z_4 \\ s \\ \downarrow z_2 \\ \xrightarrow{z_3} \end{array} \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{gz_1} \\ \uparrow z_4 g^{-1} \\ s \\ \downarrow gz_2 \\ \xrightarrow{z_3 g^{-1}} \end{array} \end{array} \right\rangle$$

$$B_h(s, p) \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{z_3} \\ \uparrow z_4 \\ p \\ \downarrow z_2 \\ \xrightarrow{z_1} \\ s \end{array} \end{array} \right\rangle = \delta_{h, z_1 z_2 z_3^{-1} z_4^{-1}} \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{z_3} \\ \uparrow z_4 \\ p \\ \downarrow z_2 \\ \xrightarrow{z_1} \\ s \end{array} \end{array} \right\rangle$$

となる。  $\{A_g(s, p), B_h(s, p)\}$  は代数として  $\mathbb{C}[G]$  の Drinfeld's quantum double  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G)$  を組む。 **NOT CHECKED!!!!!!**  $A, B$  について symmetric な形しか使わない。

$$A(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A_g(s, p), \quad B(p) = B_1(s, p)$$

- $A(s)$  は vertex  $s$  についてゲージ不変なものへの射影
- $B(p)$  は plaquette  $p$  について flat connection への射影

全ての演算子は互いに可換である (appendix C.3)。

Global Hilbert space は  $\mathcal{N} = \mathcal{H}^{\otimes E}$  で与える。

$$H_0 = \sum_s (1 - A(s)) + \sum_p (1 - B(p))$$

$$\mathcal{L} = \{|\xi\rangle \in \mathcal{N} \mid A(s)|\xi\rangle = B(p)|\xi\rangle = |\xi\rangle \quad \forall s, p\}$$

Commuting projector gapped Hamiltonian.

今後の章の結果を列挙しておく。

- 1 種類の励起は一般に vertex とそれを含む plaquette の両方 (site) を occupy する
- 球面上  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  粒子状態の空間  $\mathcal{L}[n] := \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$  は  $|G|^{2(n-1)}$  次元
- 局所摂動を加えても解けない縮退がある
- $\mathcal{L}[n]$  に作用する local operators の代数  $\mathcal{P}[n] \subset \mathbf{L}(\mathcal{L}[n])$  の中心  $\mathcal{C}[n]$  は保存する局所観測可能量
- 局所観測可能量の “タイプ” は quantum double  $\mathcal{D}$  の既約表現に 1:1 対応

これに加えてもうちょい細々とした、でも大事な話がある。  $d_1, \dots, d_n$  を局所観測可能量の “タイプ” として

$$\mathcal{L}[n] = \bigoplus_{d_1, \dots, d_n \in \text{Irrep}(\mathcal{D})} \mathcal{L}(d_1, \dots, d_n), \quad \mathcal{P}[n] = \bigoplus_{d_1, \dots, d_n \in \text{Irrep}(\mathcal{D})} \mathcal{P}(d_1, \dots, d_n)$$

<sup>\*10</sup> group algebra では  $A_g(s, p)$  は  $p$  に依存しないが、Hopf 代数では依存するので、 $s$  残しておく。

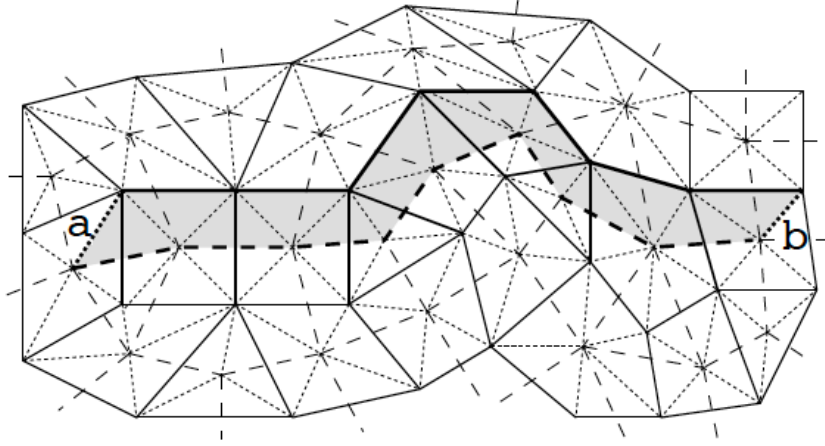


図 4: A ribbon on the lattice (from the original paper [Kit03])

の分解が可能である。すなわち  $n$  粒子状態を「どのタイプの粒子が何個あるか」というセクターに分割する。local operator は粒子のタイプを実質的に変えないので  $\mathcal{P}[n]$  の分解も同様に説明できるらしい。 $\mathcal{C}[n]$  は  $\mathcal{L}_{d_1, \dots, d_n}$  への射影の集合に他ならない。さらに、 $\mathcal{L}_{d_1, \dots, d_n}$  は local operators  $\mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n}$  の作用により sensitive な空間と robust な空間に分解できる。

$$\mathcal{L}_{d_1, \dots, d_n} = \mathcal{K}_{d_1, \dots, d_n} \otimes \mathcal{M}_{d_1, \dots, d_n}, \quad \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n} = \mathbf{L}(\mathcal{K}_{d_1, \dots, d_n})$$

sensitive な空間  $\mathcal{K}_{d_1, \dots, d_n}$  は local な自由度に対応するので  $\mathcal{K}_{d_1, \dots, d_n} = \mathcal{K}_{d_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{K}_{d_n}$  と書けるが、protected subspace  $\mathcal{M}_{d_1, \dots, d_n}$  は局所的な測定でアクセスできず、局所摂動でも変化しない。この protected subspaceこそが見たいものである。

テンソル積構造がないのでややこしいが、具体的に構成できる。

1. particle type  $a$  に quantum double  $\mathcal{D}$  の既約表現  $\mathcal{U}_d$  を割り当てる
2. テンソル積表現  $\mathcal{U}_{d_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{U}_{d_n}$  を既約分解する
3. 自明表現部分が protected subspace  $\mathcal{M}_{d_1, \dots, d_n}$  になる

braiding をすると protected subspace は (一般に高次元の) unitary transformation を受けるので、non-abelian anyon の構成になっている。

## 5 quantum double の代数構造

### 5.1 ribbon operators

励起を発生する operator を構成する。<sup>\*11</sup>toric code では 2 種類の string operator があったが、non-abelian も含めると二つを同時に考えなければならない。粒子のペアはサイトを結ぶ ribbon operator と呼ばれる演算子で生成される (Fig. 4)。

<sup>\*11</sup> Kitaev 自身、演繹的な構成法は知らないと言っている。本来このサブセクションは後ろにあるものだが、代数の議論を先にやると目的が見えないのではじめに演算子を構成してしまった方が個人的には教育的だと思う。

サイト  $(s, p), (s', p')$  を結びリボン  $t$  を与えたとき、 $g, h \in G$  に応じて  $|G|^2$  個の ribbon operator  $F^{h,g}(t)$  が定義される。

$$F^{h,g}(t) \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \quad \xleftarrow{x_2} \quad \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3 \end{array} = \delta_{g, x_1 x_2 x_3} \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \quad \xleftarrow{x_2} \quad \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow h y_1 \quad \uparrow x_1^{-1} h x_1 y_2 \quad \uparrow (x_1 x_2)^{-1} h (x_1 x_2) y_3 \end{array}$$

$r = s, s'$  と  $l = p, p'$  を除いて全ての  $A(r), B(l)$  と可換である (appendix C.4.1)。

$F^{h,g}(t)$  は ribbon  $t$  に依存するが、 $n$  粒子状態空間  $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$  への作用としては ribbon の topological class にしか依存しない。サイト  $x_1 = a, x_2 = b$  を繋ぐ ribbon  $t, q$  が与えられた時、他の  $x_3, \dots, x_n$  がリボン直上ないしその間になければ  $F^{h,g}(t) = F^{h,g}(q)$  が成り立つ。NOT CHECKED!!!!!!

$t$  を fix したとき、 $F^{h,g}(t)$  の線形結合も ribbon operator と呼び、これらが組む代数を  $\mathcal{F}(t) \cong \mathcal{F}$  と書くことにする。積は Einstein の縮約記法によって

$$F^m(t) F^n(t) = \Lambda_{\mathbf{k}}^{m,n} F^{\mathbf{k}}(t), \quad \Lambda_{(h,g)}^{(h_1, g_1), (h_2, g_2)} := \delta_{h_1 h_2, h} \delta_{g_1, g} \delta_{g_2, g}$$

である (appendix C.4.3)。また 1 本のリボンは二つに分割して表すことができる。NOT CHECKED!!!!!!

$$F^{\mathbf{k}} \left( \begin{array}{|c|c|} \hline t_1 & t_2 \\ \hline \end{array} \right) = \Omega_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^{\mathbf{k}} F^{\mathbf{m}}(t_1) F^{\mathbf{n}}(t_2), \quad \Omega_{(h_1, g_1), (h_2, g_2)}^{(h, g)} = \delta_{g, g_1 g_2} \delta_{h_1, h} \delta_{h_2, g_1^{-1} h g_1}$$

$F^{\mathbf{m}}(t_1), F^{\mathbf{n}}(t_2)$  はリボンが重複していないので可換になる。これは余代数における co-multiplication  $\Delta(t_1, t_2) : \mathcal{F}(t_1, t_2) \rightarrow \mathcal{F}(t_1) \otimes \mathcal{F}(t_2)$  に対応する。リボンの切断をしていくと、Fig. 4 のリボンを三角形ごとに分割できる。それぞれの三角形に対して

$$\text{点線} \times 2 + \text{破線} \times 1 \quad F^{h,g}(i, r) = \delta_{g,1} L^h(i, r)$$

$$\text{点線} \times 2 + \text{実線} \times 1 \quad F^{h,g}(j, l) = T^{g^{-1}}(j, l)$$

を割り振ると ribbon operator を実現する。NOT CHECKED!!!!!!

## 5.2 粒子と局所演算子

$\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}$  は  $a$  依存性がない。この代数 (quasi-triangular Hopf algebra になるらしい) は  $G$  の quantum double と呼ばれ  $D(G)$  と書かれる。その構造は以下を満たす  $A_g = A_g(a), B_h = B_h(a)$  により決定される。

$$A_f A_g = A_{fg}, \quad B_h B_i = \delta_{h,i} B_h, \quad A_g B_h = B_{ghg^{-1}} A_g$$

演算子  $D_{(h,g)} = B_h A_g$  が  $\mathcal{D}$  の基底を与える。NOT CHECKED!!!!!!

$$D_{(h_1, g_1)} D_{(h_2, g_2)} = \delta_{h_1, g_1 h_2 g_1^{-1}} D_{(h_1, g_1 g_2)}$$

が成り立つ。この恒等式は  $h, g$  をひとまとめにして Einstein の縮約記法を使うことで

$$D_{\mathbf{m}} D_{\mathbf{n}} = \Omega_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^{\mathbf{k}} D_{\mathbf{k}}, \quad \Omega_{(h_1, g_1), (h_2, g_2)}^{(h, g)} := \delta_{h_1, g_1 h_2 g_1^{-1}} \delta_{h, h_1} \delta_{g, g_1 g_2}$$

と書ける。 $\mathcal{D}$  は  $L(\mathcal{N})$  の hermitian conjugation で閉じる。

$$A_g^\dagger = A_{g^{-1}}, \quad B_h^\dagger = B_h, \quad D_{(h,g)}^\dagger = D_{(g^{-1} h g, g^{-1})}$$

共役類	中心化群の union
$\{g1g^{-1}\} = \{1\}$	$S_3$
$\{g(12)g^{-1}\} = \{(12), (13), (23)\}$	$\{1, (12), (13), (23)\}$
$\{g(123)g^{-1}\} = \{(123), (132)\}$	$\{1, (123), (132)\}$

こうやって作用するかは確認していない!!!!!! よって  $\mathcal{D}$  は有限次元  $C^*$ -algebra であり、

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{d \in \text{Irrep}(\mathcal{D})} \mathbf{L}(\mathcal{K}_d)$$

の構造を持つ。NOT CHECKED!!!!!!

演算子  $D_{(h,g)}$  は基底状態  $|\xi\rangle$  に対して

$$D_{\mathbf{k}} |\xi\rangle = \varepsilon_{\mathbf{k}} |\xi\rangle, \quad \epsilon_{(h,g)} = \delta_{h,1}$$

と作用する。NOT CHECKED!!!!!!

“subtypes” の空間  $\mathcal{K}_d$  は elementary excitation の redundancy を与えるが、次に見る ribbon operator についてうまく記述するためにこの redundancy は必要である。

$\mathcal{D}$  の既約表現は以下の議論で得られる。 $u \in G$  を任意にとりて  $C = \{gug^{-1} \mid g \in G\}$  を  $u$  の共役類、 $E = \{g \in G \mid gu = ug\}$  を  $u$  の中心化群とする。それぞれの共役類  $C$  と中心化群  $E$  の表現  $\chi$  を指定するごとに  $\mathbf{D}(G)$  の 1 次元表現が存在し、これを  $d = (C, \chi)$  と書くことにする (後述)。共役類  $C$  は磁化を、表現  $\chi$  は電荷を表すらしい。WHY??????

permutation group  $S_3$  を例にとる。 $S_3$  には 1 次元表現が 2 つ、2 次元表現が 1 つある。共役類と中心化群は の 3 種類。よって  $\mathbf{D}(S_3)$  の既約表現は次元が 1, 1, 2; 2, 2, 3, 3 である。一番簡単なのは  $\xi$  が自明表現のときで、粒子は磁荷のみを持つ。

## 付録 A ゲージ理論

### A.1 電磁場の量子化

あらかじめ粒子の正準量子化を思い出す。Lagrangian  $L$  と座標  $q$  から

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

で共役変数が定義される。正準量子化ではこの間に

$$[q, p] = i$$

を要請する。場の理論では座標に対応して場  $\phi(x)$  があり、運動量に対応する共役な場を

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

と定義し、量子化を

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y)$$

で与えるのが一般的である。

Maxwell 理論で電磁場を量子化する。notation を論文に合わせて

$$\Pi_i(x) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t A_i(x)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \partial_t A_i(x)} (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi)^2 = E_i$$

となるので、正準量子化は  $[A_i(x), E_j(y)] = i\delta_{ij}\delta(x-y)$  となる。

## A.2 U(1) Higgs mechanism

U(1) ゲージ理論

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

にて U(1) ゲージ変換は

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

である。運動方程式は

$$(D^\mu D_\mu + m^2 + \lambda|\phi|^2)\phi = 0$$

であり、特に  $m^2 < 0$  のとき wine bottle potential なので、真空にて  $\phi$  は自発的に U(1) 対称性を破る。安定な真空の周りで

$$\phi(x) = [h(x) + v]e^{i\xi(x)/v}$$

と展開すると U(1) ゲージ変換は

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\xi(x)/v} \phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi(x)$$

となる。変換後のゲージ場に Nambu-Goldstone モードを組み込んで最右辺を  $\tilde{A}_\mu(x)$  と再定義 (ゲージ固定) すると Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (ev)^2 \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu + \dots$$

となって、残りの項には Higgs 場  $h(x)$  が含まれる。第 2 項はゲージ場が質量  $ev$  を獲得したことを意味する。

Higgs mechanism の要点として

1. ゲージ場が連続対称性を自発的に破る
2. Nambu-Goldstone モード (位相の場) をゲージ場に組み込むゲージ固定
3. ゲージ場が質量を獲得

を理解していればこの論文は読めそう。

超伝導も Anderson-Higgs mechanism で説明される。U(1) を破ってゲージ固定を行うと光子 (ゲージ場) が質量を獲得して磁場の侵入を許さなくなる (Meissner effect).

## 付録 B Hopf 代数

### Def. 1: $\mathbb{K}$ -代数

$\mathbb{K}$  を体、 $A$  を  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間、線型写像  $m : A \otimes A \rightarrow A$ ,  $u : \mathbb{K} \rightarrow A$  が

結合律  $(ab)c = a(bc)$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \text{id} \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

単位律  $1a = a = a1$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes u} & A \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow \sim & \downarrow m & \swarrow \sim & \\ \alpha \otimes a & & A & & a \otimes \alpha \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \alpha a & & \end{array}$$

を可換にすると、 $(A, m, u)$  は  $\mathbb{K}$ -代数という。

### Def. 2: 余代数

線型空間  $C$  と線型写像  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ ,  $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$  が

余結合律

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

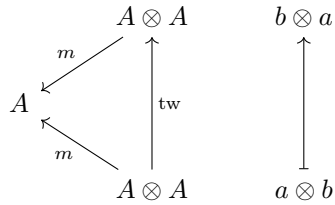
余単位律

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 1 \otimes c & & C & & c \otimes 1 \\ & \swarrow \sim & \downarrow \Delta & \searrow \sim & \\ \mathbb{K} \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \epsilon} & C \otimes \mathbb{K} \end{array}$$

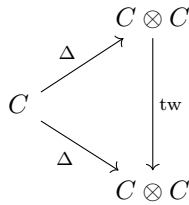
を可換にすると、 $(C, \Delta, \epsilon)$  は余代数という。特に  $\Delta$  を co-multiplication、 $\epsilon$  を co-unit と呼ぶ。

**Def. 3: commutative, co-commutative**

$\mathbb{K}$ -代数  $A$  が以下を可換にすると、 $A$  は可換であるという。



また  $\mathbb{K}$ -余代数  $C$  が以下を可換にすると、 $C$  は co-commutative であるという。



**Rem.**

sigma notation 特に comultiplication  $\Delta$  の一般論を扱うにあたって、これをどのように表すかが問題になる。有限次元線形代数であっても

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \quad (a_i, b_i \in C)$$

のように書けるが、毎回  $a_i, b_i$  を定義する手間を惜しんでこれを単に

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$$

と書くことが多い ( $\Sigma$  記法)。特に coassociativity

$$\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2)$$

があるので、これをさらに

$$= \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$

と書ける。counitality も

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\varepsilon(c_2)$$

と書ける。なお Hopf 代数の定番の教科書となっている Sweedler の書籍では

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

のように書いているらしい。

**Def. 4: \*-積, 双対代数**

$C$  を  $\mathbb{K}$ -coalgebra,  $A$  を  $\mathbb{K}$ -algebra として、 $\text{hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$  を  $C$  から  $A$  への  $\mathbb{K}$ -線型写像全体とする。このとき、 $\text{hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$  の元  $f, g$  に対して

$$f * g : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A; \quad (f * g)(c) := \sum f(c_1)g(c_2)$$

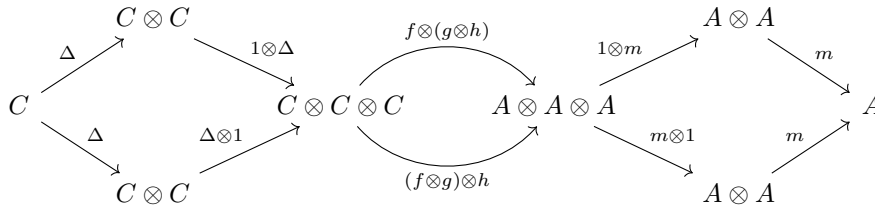
を \*-product と呼ぶ。

**Lem. 1:  $\text{hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$  is a  $\mathbb{K}$ -algebra**

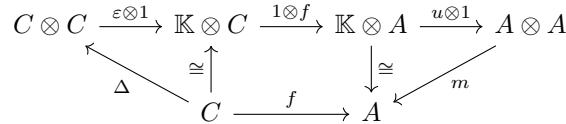
$\text{hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$  は結合的な \*-product と単位元  $u \circ \varepsilon$  をもつ  $\mathbb{K}$ -algebra (dual algebra) である。

**Prf.**

associativity は次が可換であることから従う。



ただし縦の等号は coassociativity から、真ん中の正方形の可換性は  $\text{hom}$  の結合性 (圏の定義) から従う。単位元はテンソル積の bifunctoriness  $(g_1 \circ h_1) \otimes (g_2 \circ h_2) = (g_1 \otimes g_2) \circ (h_1 \otimes h_2)$  と unitary, counitary の可換図式を使って以下の図式が可換になることからわかる。



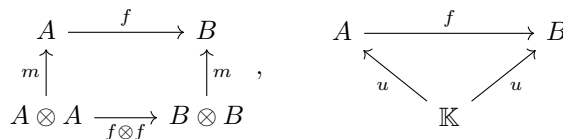
中央の四角形の可換性は定義を追えば自明。右単位性も同様。

**Rem.**

$A$  の双対空間を  $A^*$  で表すとすると、 $A$  が無次元の場合、一般に  $A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$  であることに注意せよ。

**Def. 5: algebra map, coalgebra map**

1.  $A, B$  を  $\mathbb{K}$ -代数、 $f : A \rightarrow B$  を線型写像とする。次が可換ならば、 $f$  は algebra map であるという。



2.  $C, D$  を  $\mathbb{K}$ -余代数、 $f : C \rightarrow D$  を線型写像とする。次が可換ならば、 $f$  は coalgebra map であるという。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \varepsilon \searrow & & \swarrow \varepsilon \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

**Def. 6: bialgebra**

$B$  が  $\mathbb{K}$ -algebra かつ  $\mathbb{K}$ -coalgebra であって、comultiplication  $\Delta : B \rightarrow B \otimes B$  と counit  $\varepsilon : B \rightarrow \mathbb{K}$  が  $\mathbb{K}$ -algebra map であるとき、 $B$  は bialgebra であるという。

**Rem.**

続く補題を示すにあたって、テンソル積の algebra, coalgebra 構造を考慮したい。 $A, B$  が  $\mathbb{K}$ -algebra のとき、積

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

と単位元  $1 \otimes 1$  を定めると、 $A \otimes B$  は  $\mathbb{K}$ -algebra となる。 $C, D$  が  $\mathbb{K}$ -coalgebra のとき、

$$\Delta(c \otimes d) = \sum (c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2), \quad \varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon(c)\varepsilon(d)$$

と定めると、 $C \otimes D$  は  $\mathbb{K}$ -coalgebra となる。

**Lem. 2**

$B$  が algebra と coalgebra の両方の構造をもつとき、以下は同値。

- $\Delta$  と  $\varepsilon$  が algebra map である。
- $m$  と  $u$  が coalgebra map である。

すなわちどちらも bialgebra の定義になりうる。

**Prf.**

$\Delta$  と  $\varepsilon$  が algebra map であるとき、任意の  $x, y \in B$  に対して

1.  $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum x_1y_1 \otimes x_2y_2$
2.  $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$
3.  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$
4.  $\varepsilon(1) = 1$

であり、上二つは  $m$  が coalgebra map であることを、下二つは  $u$  が coalgebra  $\mathbb{K}$  の coalgebra map であることを意味する。逆も同様に示される。NOT CHECKED!!!

**Def. 7: Hopf algebra**

$H$  を  $\mathbb{K}$ -bialgebra とする。双対代数  $\text{hom}_{\mathbb{K}}(H, H)$  の恒等写像  $\text{id}_H \in \text{hom}_{\mathbb{K}}(H, H)$  が  $*$ -積に関して逆元  $S$  をもつとき、 $H$  は Hopf algebra であるという。またこの  $S$  を antipode と呼ぶ。

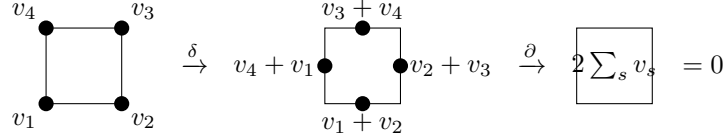
## 付録 C 途中式の導出

### C.1 extended Hilbert space の対称性演算子 (3.2)

頂点を含め計算基底をとって任意の状態を  $|z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$  と表す。  $U$  により

$$U |z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = |z + \delta\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \partial\mathbf{z}\rangle, \quad (\delta\mathbf{v})_j = \sum_{s=\text{endpoint}(j)} v_s, \quad (\partial\mathbf{z})_p = \sum_{j \in \text{boundary}(p)} z_j$$

と変換される。



により  $\partial\delta\mathbf{v} = 0$  となることに注意せよ。また

$$U^2 |z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = |z + 2\delta\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + 2\partial\mathbf{z} + \partial\delta\mathbf{v}\rangle = |z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$$

なので  $U^\dagger = U$ 。

具体的に  $P_s$  を計算してみる。  $\sigma_s, \sigma_p$  は ancilla の自由度に作用することに注意せよ。

$$\begin{aligned} U\sigma_s^x U^\dagger |z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle &= U\sigma_s^x |z + \delta\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \partial\mathbf{z}\rangle = U |z + \delta\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{e}_s, \mathbf{w} + \partial\mathbf{z}\rangle \\ &= |z + 2\delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{e}_s, \mathbf{v} + \mathbf{e}_s, \mathbf{w} + 2\partial\mathbf{z} + \partial\delta\mathbf{v}\rangle \\ &= |z + \delta\mathbf{e}_s, \mathbf{v} + \mathbf{e}_s, \mathbf{w}\rangle \end{aligned}$$

第2引数の変化は  $\sigma_s^x$  により  $v_s$  が反転することで得られる。第1引数の変化は  $A_s$  を作用させて得られるので、  $P_s = U\sigma_s^x U^\dagger = \sigma_s^x A_s$  が得られる。

$$\begin{aligned} U\sigma_p^z U^\dagger |z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle &= U\sigma_p^z |z + \delta\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \partial\mathbf{z}\rangle = (-1)^{w_p + (\partial\mathbf{z})_p} U |z + \delta\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \partial\mathbf{z}\rangle \\ &= (-1)^{w_p + (\partial\mathbf{z})_p} |z, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \end{aligned}$$

となる。  $(-1)^{(\partial\mathbf{z})_p}$  は  $B_p$  を作用させて得られるので、  $Q_p = U\sigma_p^z U^\dagger = \sigma_p^z B_p$  が得られる。

### C.2 quantum double の (co)multiplication 代数 (4.1) の導出

$$\begin{aligned} L_+^g T_+^h |z\rangle &= \delta_{h,z} |gz\rangle = T_+^{gh} |gz\rangle = T_+^{gh} L_+^g |z\rangle, \\ L_-^g T_+^h |z\rangle &= \delta_{h,z} |zg^{-1}\rangle = T_+^{hg^{-1}} |zg^{-1}\rangle = T_+^{hg^{-1}} L_-^g |z\rangle, \\ L_+^g T_-^h |z\rangle &= \delta_{h^{-1},z} |gz\rangle = T_-^{(gh^{-1})^{-1}} |gz\rangle = T_-^{hg^{-1}} L_+^g |z\rangle, \\ L_-^g T_-^h |z\rangle &= \delta_{h^{-1},z} |zg^{-1}\rangle = T_-^{(h^{-1}g^{-1})^{-1}} |zg^{-1}\rangle = T_-^{gh} L_-^g |z\rangle \end{aligned}$$

### C.3 quantum double の local operator の可換性

$B(p)$  同士は明らかに可換。 $A(s)$  同士も「ゲージ不変なものへの射影」であることを念頭に置くと可換であることが納得できる。

非自明なのは  $A(s)$  と  $B(p)$  の可換性である。次のようなケースを考える。

$$|\psi\rangle := \left| \begin{array}{c} p \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & z_2 \\ \rightarrow & & s \\ z_1 & & \end{array} \end{array} \right\rangle$$

$s$  からは右下方向にならもっと辺を出しても議論に影響しない。非自明な交換性を与える部分だけを明示して書くと、

$$\begin{aligned} A(s)B(p)|\psi\rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} A_g(s)B_1(s,p)|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \cdots \times L_+^g(z_1)L_-^g(z_2) \times \cdots \sum_{\dots h_1 h_2 \dots = 1} \cdots \times T_-^{h_1}(z_1)T_-^{h_2}(z_2) \times \cdots |\psi\rangle \\ &= \sum_{\dots h_1 h_2 \dots = 1} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \cdots \times T_-^{gh_1}(z_1)T_-^{h_2 g^{-1}}(z_2) \times \cdots \times \cdots \times L_+^g(z_1)L_-^g(z_2) \times \cdots |\psi\rangle \end{aligned}$$

である。ここで  $h_k$  についても総和にて  $h_m \mapsto g^{-1}h_k g$  と変数変換すれば、 $g \cdots h_1 h_2 \cdots g^{-1} = 1$  の configuration での足し上げになる。これはまさしく  $B(p)A(s)|\psi\rangle$  の計算と同じである。

多分その他のケースも同様にして可換性が確かめられるんだろう。

### C.4 Ribbon operator

#### C.4.1 Ribbon operator と stabilizer の交換

$$\begin{aligned} A_k(s)F^{(h,g)}(t) & \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \bullet \quad \leftarrow \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3 \quad \uparrow y_4 \end{array} \\ &= \delta_{g, x_1 x_2 x_3 x_4} A_k(s) \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \uparrow h y_1 \quad \uparrow x_1^{-1} h x_1 y_2 \quad \uparrow (x_1 x_2 x_3)^{-1} h (x_1 x_2 x_3) y_4 \\ (x_1 x_2)^{-1} h (x_1 x_2) y_3 \end{array} \\ &= \delta_{g, x_1 x_2 x_3 x_4} \begin{array}{c} x_1 \quad k x_2 \quad x_3 k^{-1} \quad x_4 \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \uparrow h y_1 \quad \uparrow x_1^{-1} h x_1 y_2 \quad \uparrow (x_1 x_2 x_3)^{-1} h (x_1 x_2 x_3) y_4 \\ (x_1 x_2)^{-1} h (x_1 x_2) y_3 k^{-1} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{(h,g)}(t)A_k(s) & \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{s} \xleftarrow{x_3} \xleftarrow{x_4} \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3 \quad \uparrow y_4 \end{array} = F^{(h,g)}(t) \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{kx_2} \xleftarrow{x_3k^{-1}} \xleftarrow{x_4} \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3k^{-1} \quad \uparrow y_4 \end{array} \\
& = \delta_{g,x_1kx_2x_3k^{-1}x_4} \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{kx_2} \xleftarrow{x_3k^{-1}} \xleftarrow{x_4} \\ \uparrow hy_1 \quad \uparrow x_1^{-1}hx_1y_2 \quad \uparrow (x_1kx_2x_3k^{-1})^{-1}h(x_1kx_2x_3k^{-1})y_4 \\ \quad \quad \quad \uparrow (x_1kx_2)^{-1}h(x_1kx_2)y_3k^{-1} \end{array}
\end{aligned}$$

であり、 $k$  についての総和をとることで  $[A(s), F^{(h,g)}(t)] = 0$  が確かめられる。

$$\begin{aligned}
F^{(h,g)}(t)B(s,p) & \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{s} \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3 \\ p \end{array} \\
& = \delta_{1,x_2^{-1}y_2 \times \dots \times y_3^{-1}} F^{(h,g)}(t) \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3 \end{array} \\
& = \delta_{1,x_2^{-1}y_2 \times \dots \times y_3^{-1}} \delta_{g,x_1x_2x_3x_4} \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow hy_1 \quad \uparrow x_1^{-1}hx_1y_2 \quad \uparrow (x_1x_2)^{-1}h(x_1x_2)y_3 \end{array} \\
B(s,p)F^{(h,g)}(t) & \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{s} \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow y_1 \quad \uparrow y_2 \quad \uparrow y_3 \\ p \end{array} \\
& = \delta_{g,x_1x_2x_3x_4} B(s,p) \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow hy_1 \quad \uparrow x_1^{-1}hx_1y_2 \quad \uparrow (x_1x_2)^{-1}h(x_1x_2)y_3 \end{array} \\
& = \delta_{g,x_1x_2x_3x_4} \delta_{1,x_2^{-1}(x_1^{-1}hx_1y_2) \times \dots \times (x_2^{-1}x_1^{-1}hx_1x_2y_3)^{-1}} \\
& \quad \times \begin{array}{c} \xleftarrow{x_1} \xleftarrow{x_2} \xleftarrow{x_3} \\ \uparrow hy_1 \quad \uparrow x_1^{-1}hx_1y_2 \quad \uparrow (x_1x_2)^{-1}h(x_1x_2)y_3 \end{array}
\end{aligned}$$

ただし Kronecker delta で省略している部分は  $p$  のうち ribbon に含まれていない辺についての演算である。

$$\begin{aligned}
x_2^{-1}(x_1^{-1}hx_1y_2) \times \dots \times (x_2^{-1}x_1^{-1}hx_1x_2y_3)^{-1} & = (x_1h^{-1}x_1x_2)^{-1}y_2 \times \dots \times y_3^{-1}x_2^{-1}(x_1h^{-1}x_1x_2) \\
\implies x_2y_2 \times \dots \times y_3^{-1} & = 1
\end{aligned}$$

なので、 $[B(s,p), F^{(h,g)}(t)] = 0$  も確かめられる。多分他にも同様に確かめられると思う。

