Surface code 個人メモ

Takuma Saito

2026 年 4 月 24 日

toric code [Kit03] を境界付き平面に拡張したものが surface code [FM98, BK98] である。[BK98] に沿って記述する。

1 toric code と notations

トーラス T^2 に正方格子を引き、格子の辺に qubit を置く。

$$A_s = \prod_{j \in \mathrm{star}(s)} \sigma_j^x, \quad B_p = \prod_{j \in \mathrm{boundary}(p)} \sigma_j^z$$

として、基底状態は

$$A_s \left|\xi\right\rangle = B_p \left|\xi\right\rangle = \left|\xi\right\rangle \qquad \forall s, p$$

を満たすものとする。基底状態空間 C は 4 次元なので、2 つの logical qubit による Hilbert 空間で identify できる。C に作用する logical operator が満たす代数 $\boldsymbol{L}(C)$ によってこの identification が可能である。任意の logical operator は全 Hilbert 空間 $(\boldsymbol{C}^2)^{2\otimes L^2}$ の上で定義されるので、自然に包含されるが、そのような拡張は unique ではない。しかし全ての A_s, B_p と可換になるような logical operator を取ることができる。このような operator は algebra $\mathcal{G}$ を組む。ここから $\boldsymbol{L}(C)$ を得るには、A_s, B_p が C に自明に作用しなければならない。より厳密には、$\boldsymbol{L}(C) = \mathcal{G}/\mathrm{Span}\{A_s - 1, B_p - 1\}$ である。

特に c を $\mathbb{Z}_2$ 値の 1-cycle, c^* を $\mathbb{Z}_2$ 値の dual lattice における 1-cycle として

$$Y(c, c^*) := \prod_{i \in c} \sigma_i^z \prod_{j \in c^*} \sigma_j^x \tag{1.1}$$

の形の演算子を考える。dual lattice の edge は元の格子の edge に対応しているので、二つの lattice は qubit を共有している。演算子 $Y(c, c^*)$ は全ての stabilizer operator A_s, B_p と可換であり、C を保存する。c, c^* のホモロジークラスにしか依存しないので、この演算子を $Y([c], [c^*])$ と表すことにする。このため、$Y(c, c^*)$ が $\mathcal{G}$ を生成するのに対し、$Y([c], [c^*])$ は $\boldsymbol{L}(C)$ を生成する。

2

有限サイズの平面上正方格子を考える。境界は 2 種類の実現方法があり、それぞれ rough boundary, smooth boundary と呼ぶことにする。See Sec. 2.

例えば最も簡単な例として、Fig. 2 に示すように、$m \times n$ 正方格子に smooth boundary を上下に、rough boundary を左右に配置した場合を考える。基底状態空間の次元は単純な数え上げでわかる。縦方向の edge

(a) rough boundary (b) smooth boundary

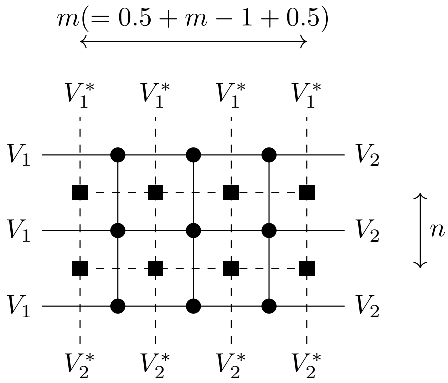

図 2: 最も単純な $m \times n$ surface code

は mn 本、横方向の edge は $(m+1)(n+1)$ 本あるので、全 Hilbert 空間の次元は $2^{2mn+m+n+1}$ である。複数の qubit に作用するのであれば中途半端な形の stabilizer operator も認めることにすれば、plaquette stabilizer operator は $(m+1)n$ 個、vertex stabilizer operator は $m(n+1)$ 個現れる。全ての stabilizer operator は独立である。よって残る自由度は

$$(2mn + m + n + 1) - (m+1)n - m(n+1) = 1$$

なので、logical qubit が 1 つ実現できる。ゆえに基底状態空間は 2 次元になる。

logical operator を具体的に構成しよう。まずは $\mathcal{G}$ 即ち全ての stabilizer operator と可換な operator を考え、その代数を stabilizer operator の自明化条件で割ることで $\boldsymbol{L}(C)$ を得る。格子と dual lattice を L, L^* で表すことにする。rough boundary は L に、smooth boundary は L^* に属することになるので、それぞれの boundary を V, V^* で表すことにする。$\mathcal{G}$ の生成元は lattice L の $\mathbb{Z}_2$-valued relative 1-cycle c と dual lattice L^* の $\mathbb{Z}_2$-valued relative 1-cycle c^* により (1.1) の形で与えられた．relative 1-cycle は境界 ∂c が格子の境界に含まれる 1-chain と定義される。等価な事実として、relative 1-cycle は格子の free end を同一視した (Fig. 2 における V_1 など同じ文字の端を同一視した) ordinary (or absolute) 1-cycle として得られる。$Y([c],[c^*])$ の基底状態空間 C への作用は relative homology class $[c] \in H^1(L,V;\mathbb{Z}_2)$, $[c^*] \in H^1(L^*,V^*;\mathbb{Z}_2) \cong H^1(L^*,V^*;\mathbb{Z}_2)$ にしか依存しない。したがって $E = H_1(L,V;\mathbb{Z}_2) \oplus H^1(L,V;\mathbb{Z}_2)$ の元 $([c],[c^*]) \in E$ により構成される $Y([c],[c^*])$ が $\boldsymbol{L}(C)$ を生成することになる。ここのトポロジカルな議論は追えていない。

Fig. 3 に示すような状況を考える。演算子 $Y^r = Y([c_{12}], 0)$ と $Y^s = Y(0, [c_{12}^*])$ が logical operator を生成する。この二つは半可換なので logical qubit の σ^z, σ^x とみなせる。

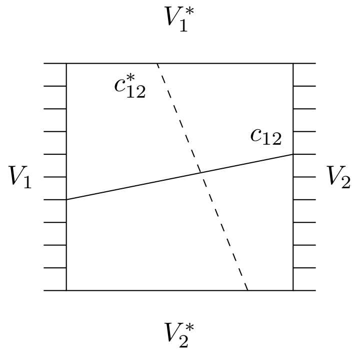

図 3: 非自明な relative homology class $[c_{12}] \in H_1(L, V, \mathbb{Z}_2)$, $[c_{12}^*] \in H^1(L^*, V^*, \mathbb{Z}_2)$

3 他の lattice での実現

4 エラー耐性

5 境界の物理的意味

トポロジカル秩序とエニオン励起を念頭に置いて surface code の境界を考察する。surface code の境界は rough または smooth の 2 種類しか許されない。(原論文では in preparation としているが、おそらく [Kit06] に書いてあるのではないか?)

bulk のトポロジカル秩序はエニオンの bariding と fusion によって特徴づけられる。セクターは 4 つで、

- 真空
- electric charge e
- magnetic flux m
- fermion $f = e \times m$

である [Kit03]。このセクターは Hamiltonian の摂動に対し安定している。安定性は braiding から説明できる。実際、electric または magnetic の charge は長距離の運動により他方を回ることで Berru phase を変更するため、勝手に消すことができない。全ての励起はエネルギーギャップがあるので、他の non-topological long-range interaction はないことに注意せよ。一方で electric charge は rough boundary で、magnetic flux は smooth boundary で消えることができる。よって bulk のトポロジカル秩序は boundary 近傍で不安定になる。stable boundary TO でバルクと整合するものは 2 種しかない。

参考文献

[BK98] S. B. Bravyi and A. Yu. Kitaev. Quantum codes on a lattice with boundary, 1998.

[FM98] Michael H. Freedman and David A. Meyer. Projective plane and planar quantum codes, 1998.

[Kit03] A.Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1):2–30, January 2003.

[Kit06] Alexei Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Annals of Physics*, 321(1):2–111, January 2006.